Paths, Trees, and Flowers by Jack Edmonds

Γιώργος Δ. Μήτσιου

Α.Λ.ΜΑ.

21 Δεκεμβρίου 2023

Εισαγωγή

- Θα παρουσιαστεί η εργασία του *Edmonds*, η οποία δίνει έναν πολυνυμικό αλγόριθμο για το μέγιστο ταίριασμα σε ένα γενικό γράφημα. Ο γνωστός *Blossom* αλγόριθμος.
- Η βασική ιδέα της εργασίας είναι η κατασκευή συγκεκριμένων υπογραφημάτων για δοθέν γράφημα G και ένα ταίριασμα M, οι οποίες καταδεικνύουν αν το ταίριασμα μπορεί να βελτιωθεί ή όχι σε συγκεκριμένα μέρη του γραφήματος.

Μονοπάτια

Συμβολισμός

Έστω γραφήματα D, E, τότε:

- Το γράφημα $D + E$ προκύπτει από το σύνολο ακμών $D + E = (D - E) \cup (E - D)$
- Το γράφημα $D \cup E$ προκύπτει με την ένωση των συνόλων των κορυφών και των ακμών
- Το γράφημα $D - E$ είναι το υπογράφημα που περιέχει τις κορυφές του D που δεν ανήκουν στο E και τις ακμές που έχουν και τα δύο άκρα τους στο D

Μονοπάτια

- Έστω γράφημα G και ταίριασμα M του G. Για το διατεταγμένο ζεύγος (G, M) μία κορυφή του G είναι *exposed* αν δεν είναι άκρο κάποιας ακμής του M.
- Ένα *alternating* μονοπάτι P στο (G, M) είναι ένα μονοπάτι στο οποίο κάθε κορυφή του εκτός από τα άκρα του πρόσκεινται σε ακριβώς μία ακμή των$M \cap P$ και $\overline{M} \cap P$.

Μονοπάτια

- Για κάθε δύο ταιριάσματα M_1, M_2 στο G οι συνεκτικές συνιστώσες του υπογραφήματος $M_1 + M_2$ είναι *alternating* μονοπάτια ή κύκλοι για τα (G, M_1) και (G, M_2) και κάθε άκρο στα μονοπάτια είναι *exposed* είτε για το M_1 είτε για το M_2.

Μονοπάτια

Ένα *alternating* μονοπάτι του οποίου και τα δύο άκρα είναι *exposed* είναι ένα *augmenting* μονοπάτι.
Ισχύει ότι $M + A$ είναι μεγαλύτερο ταίριασμα από το M.

Θ. *Berge* Ένα ταίριασμα M είναι μέγιστο στο G ανν το (G, M) δεν περιέχει *augmenting* μονοπάτι.

Δέντρα και Λουλούδια

- Ένα *alternating* δένδρο J είναι ένα δένδρο του οποίου κάθε *inner* κορυφή πρόσκειται σε ακριβώς δύο ακμές του J.
- Για κάθε *outer* κορυφή u του *alternating* δένδρου J υπάρχει μοναδικό μέγιστο ταίριασμα του J το οποίο αφήνει την u *exposed* και είναι η μοναδική *exposed* κορυφή.
  Κάθε μέγιστο ταίριασμα σε ένα τέτοιο δένδρο είναι αυτής της μορφής.
- Ένα *planted* δένδρο $J = J(M)$ για ένα ταίριασμα M του G είναι ένα *alternating* δένδρο:
  - $M \cap J$ είναι μέγιστο ταίριασμα του J
  - η κορυφή r είναι *exposed* στο $M \cap J$.
    Αυτή η κορυφή θα είναι η ρίζα του J

Δέντρα και Λουλούδια

- Ένα *stem* στο (G, M) είναι είτε μία *exposed* κορυφή, είτε ένα *alternating* μονοπάτι που έχει ακριβώς μία *exposed* κορυφή στο ένα άκρο του.
  Η κορυφή αυτή λέγεται *tip* του *stem*.
  Ισχύει ότι για ένα *alternating* δένδρο ότι το μονοπάτι από μία *outer* κορυφή στην ρίζα είναι *stem*.
- Ένα *augmenting* δένδρο $J_A = J(M)$ είναι ένα *planted* δένδρο $J(M)$ στο οποίο προσθέτουμε μία ακμή e της οποίας το ένα άκρο είναι μία *outer* κορυφή και το άλλο μία *exposed* κορυφή η οποία δεν ανήκει στο J.
  Ισχύει ότι το μονοπάτι από την ρίζα στο άκρο αυτό είναι *augmenting* μονοπάτι

Δέντρα και Λουλούδια

- Ένα *blossom* $B = B(M)$ είναι ένας περιττός κύκλος για τον οποίο ισχύει ότι: το $M \cap B$ είναι μέγιστο ταίριασμα για το B που αφήνει μόνο την κορυφή b *exposed* στο $M \cap B$.
- Ένα *flower* $F = F(M)$ είναι το γράφημα που αποτελείται από ένα *blossom* και ένα *stem* με μόνο κοινό σημείο το *tip* του *stem*.
- Ένα *flowered* δένδρο J_F είναι ένα γράφημα που προκύπτει αν σε ένα *planted* δένδρο J προσθέσουμε ακμή της οποίας και τα δύο άκρα είναι *outer* κορυφές του J.
  Ισχύει ότι η ένωση των μονοπατιών που ενώνουν την ρίζα με τα δύο άκρα της ακμής μαζί με την ακμή είναι *flower*.
- Ένα *Hungarian* δένδρο H στο G είναι ένα *alternating* δένδρο του οποίου οι *outer* κορυφές ενώνονται με ακμές στο G μόνο με *inner* κορυφές.

Δέντρα και Λουλούδια

Θεώρημα 1

Για ένα ταίριασμα M σε ένα γράφημα G μία *exposed* κορυφή είναι ένα *planted* δένδρο.
Κάθε *planted* δένδρο $J(M)$ στο G μπορεί να επεκταθεί είτε σε ένα *augmenting* δένδρο, είτε σε ένα *flowered* δένδρο, είτε σε ένα *Hungarian* δένδρο.

Απόδειξη

Κάθε *exposed* κορυφή είναι τετημένα *planted* δένδρο.
Έστω ένα *planted* δένδρο J και ένα σύνολο D (ίσως το κενό) από ακμές του G που δεν είναι στο J και ενώνουν *inner* και *outer* κορυφές του J.

(1) Αν κάθε *outer* κορυφή του J πρόσκεινται στις ακμές του $D \cup J$ τότε το J είναι *Hungarian*.
Έστω ότι u_1 *outer* κορυφή του J η οποία πρόσκεινται σε μία ακμή e εκτός του $D \cup J$ με το άλλο άκρο, u_2.

(2) Αν u_2 είναι *inner* κορυφή του J, προσθέτουμε την e στο D.

(3) Αν u_2 είναι *outer* κορυφή του J, τότε το $e \cup J$ είναι *flowered* δένδρο.

(4) Αν u_2 είναι *exposed* και όχι στο J τότε το $e \cup J$ είναι *augmenting* δένδρο.

Απόδειξη

(5) Αν u_2 όχι *exposed* και όχι στο J τότε υπάρχει ακμή $e_2 = (u_2, u_3) \in M$ όπου η u_3 δεν είναι στο J (από ορισμό). Τότε προσθέτοντας τις ακμές e, e_2 με τα άκρα τους στο J έχουμε ένα μεγαλύτερο δένδρο.

Το θεώρημα ισχύει γιατί οι (2) και (5) καταναλώνουν το πολύ όλες τις πεπερασμένες ακμές του G.

Δέντρα και Λουλούδια

Θεώρημα 2

Αν B ένα *blossom* ενός *flower* F για το (G, M) ισχύει ότι M μέγιστο για το G ανν M/B είναι μέγιστο για το G/B.
Σημείωση: $M/B = M \cap G/B$

Θεώρημα 3

Αν B ένα *blossom* στο *planted flowered* δένδρο J_F για το (G, M), το J_F/B είναι *planted* δένδρο για το $(G/B, M/B)$ και περιέχει το B/B σαν *outer* κορυφή.

Δέντρα και Λουλούδια

Απόδειξη Θεωρήματος 2

Το ευθύ είναι άμεσο από τον ορισμό του *blossom*. Για το αντίστροφο δείχνετε κάτι πιο ισχυρό:

Θεώρημα 4

Για το (G, M) έστω P ένα υποφράφημα του G τέτοιο ώστε:

- $M \cap P$ αφήνει ακριβώς μία κορυφή *exposed*
- M/P είναι μέγιστο ταίριασμα για το G/P
- $p = P/P$ είναι *tip* ενός *stem* για το $(G/P, M/P)$

Τότε το M είναι μέγιστο ταίριασμα.
Προφανώς αν αυτό ισχύει τότε ισχύει και το Θεώρημα 2.

Απόδειξη Θεωρήματος 4

Οι ακμές του S_p δημιουργούν ένα *stem* S για το (G, M). Τότε συγκρίνοντας τα $M' = M + S$ και M'/P με τα M και M/P ισχύει από τον ορισμό του *stem* ότι M' ταίριασμα στο G και $|M| = |M'|$. Όμοια και για το άλλο. Τότε το M' είναι μέγιστο για το G αν το M' είναι μέγιστο για το G/P. Φτιάχνοντας τα κατάλληλα *augmenting* μονοπάτια, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του P δείχνεται ότι αν M' όχι μέγιστο τότε M'/P όχι μέγιστο και έχουμε το ζητούμενο.

Δέντρα και Λουλούδια

Θεώρημα 5

Έστω ένα *Hungarian* δέντρο στο G. Ένα ταίριασμα M_1 του $G - J$ είναι μέγιστο ανν το M_1 με ένα μέγιστο M_J του J είναι μέγιστο για το G.

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στον ορισμό του *Hungarian* δένδρου και στο ότι τα $G, G - J$ είναι ξένα.

Σύνοψη αλγορίθμου

- Από τα Θεωρήματα 1 και 3 προκύπτει ότι ξεκινώντας με ένα ταίριασμα και μία *exposed* κορυφή.
- Καταλήγουμε με μία σειρά μετασχηματισμών, συρρικνώνοντας *blosoms* είτε με ένα *augmenting* δένδρο είτε με ένα *Hungarian*.
- Το ένα μεγαλώνει το υπάρχον ταίριασμα κατά 1, το άλλο δεν συνεισφέρει (από Θεώρημα 5) και το αφαιρούμε αφαιρώντας τουλάχιστον μία *expose* κορυφή την ρίζα.

Σύνοψη αλγορίθμου

- Δηλαδή έχοντας αρχικά ένα ταίριασμα M πιθανόν το κενό που αφήνει μία κορυφή τουλάχιστον *exposed* και εφαρμόζοντας τα παραπάνω.
- Ο αλγόριθμος θα τερματίσει όταν το μετασχηματισμένο γράφημα θα έχει ακριβώς μία *exposed* κορυφή και δεν θα μπορεί να μεγαλώσει άλλο το ταίριασμα.
- Τέλος για κάθε συρικνομένο *blossom* θα πάρουμε το μεγιστο του ταίριασμα.
- Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μη συνεκτικό γράφημα, τότε απλά εφαρμόζουμε τα προηγούμενα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα.

Πηγές

Paths, Trees, and Flowers by Jack Edmonds

Σας ευχαριστώ για τον χρόνο σας!
Καλές γιορτές!!