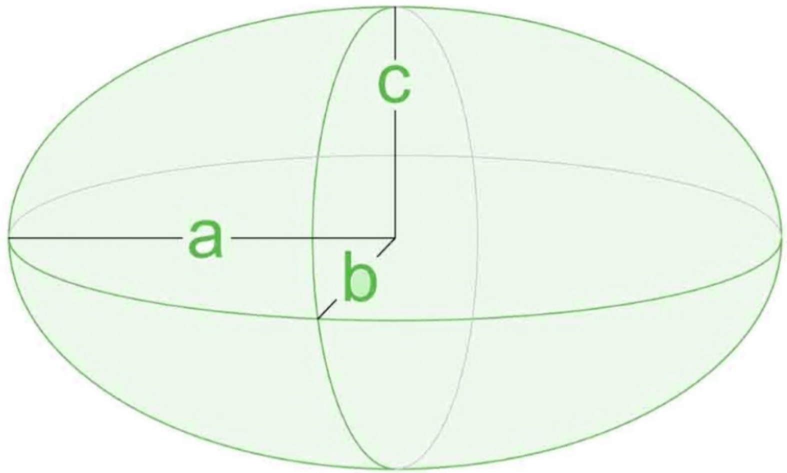
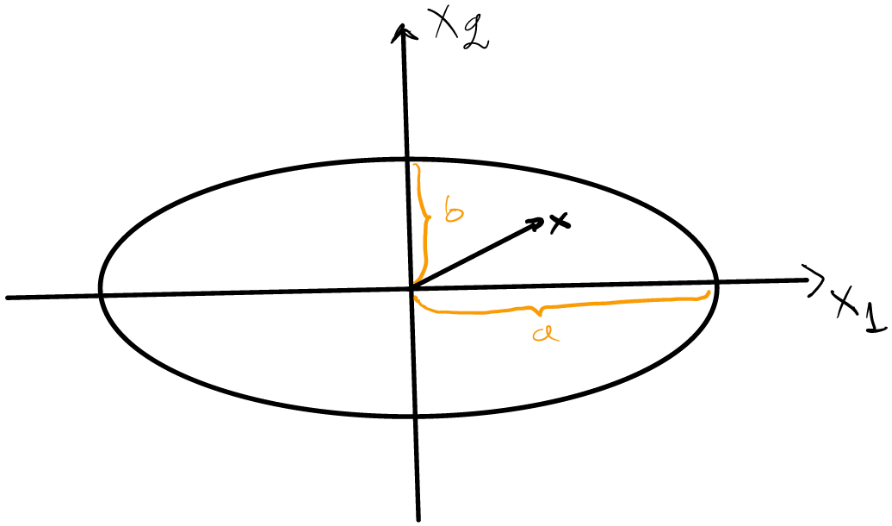
Ελλειψοειδή



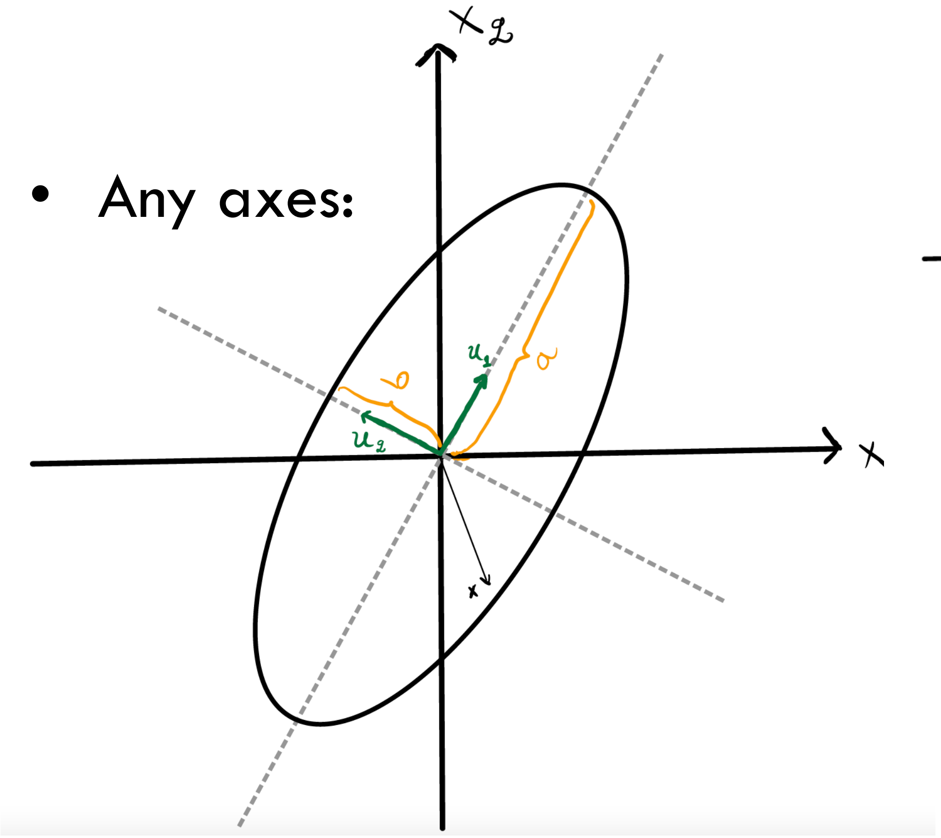
Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Axis aligned:

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$



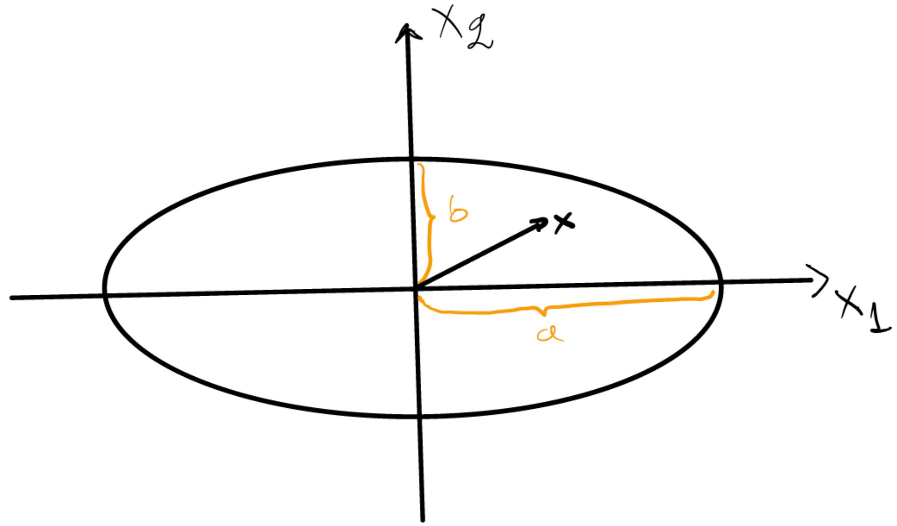
  - Any axes:



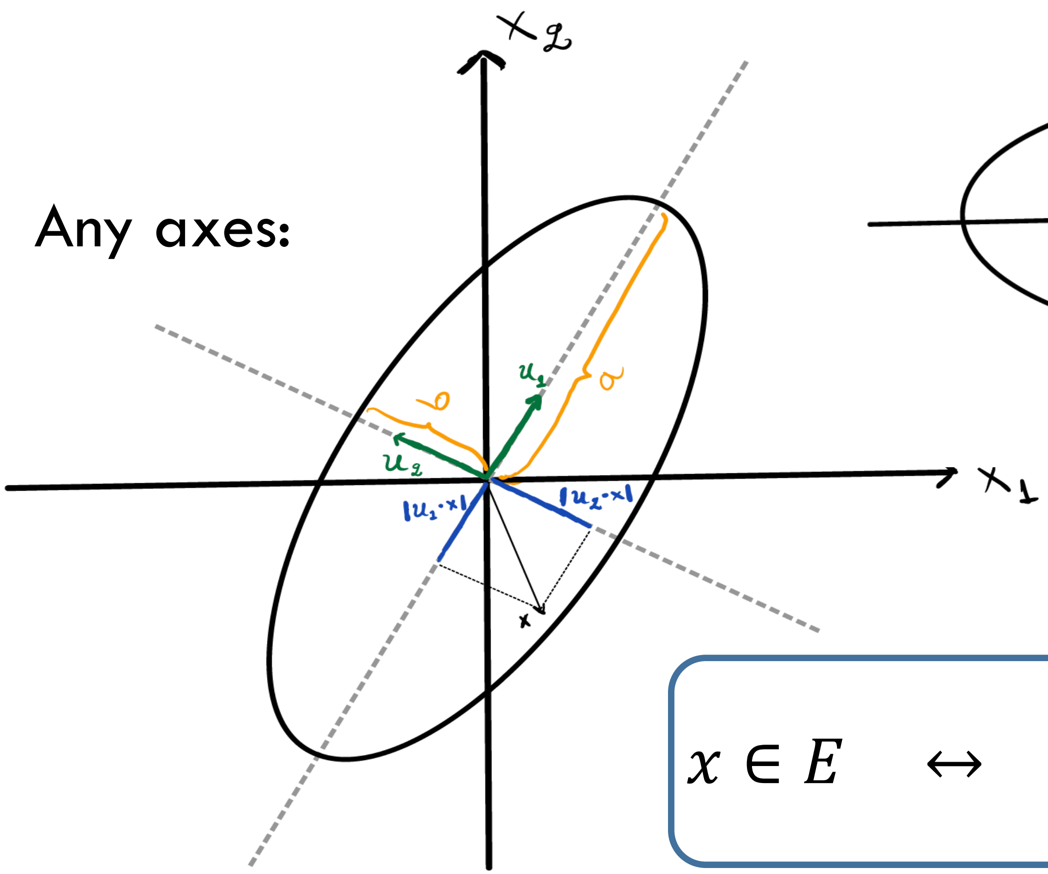
Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Axis aligned:

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$



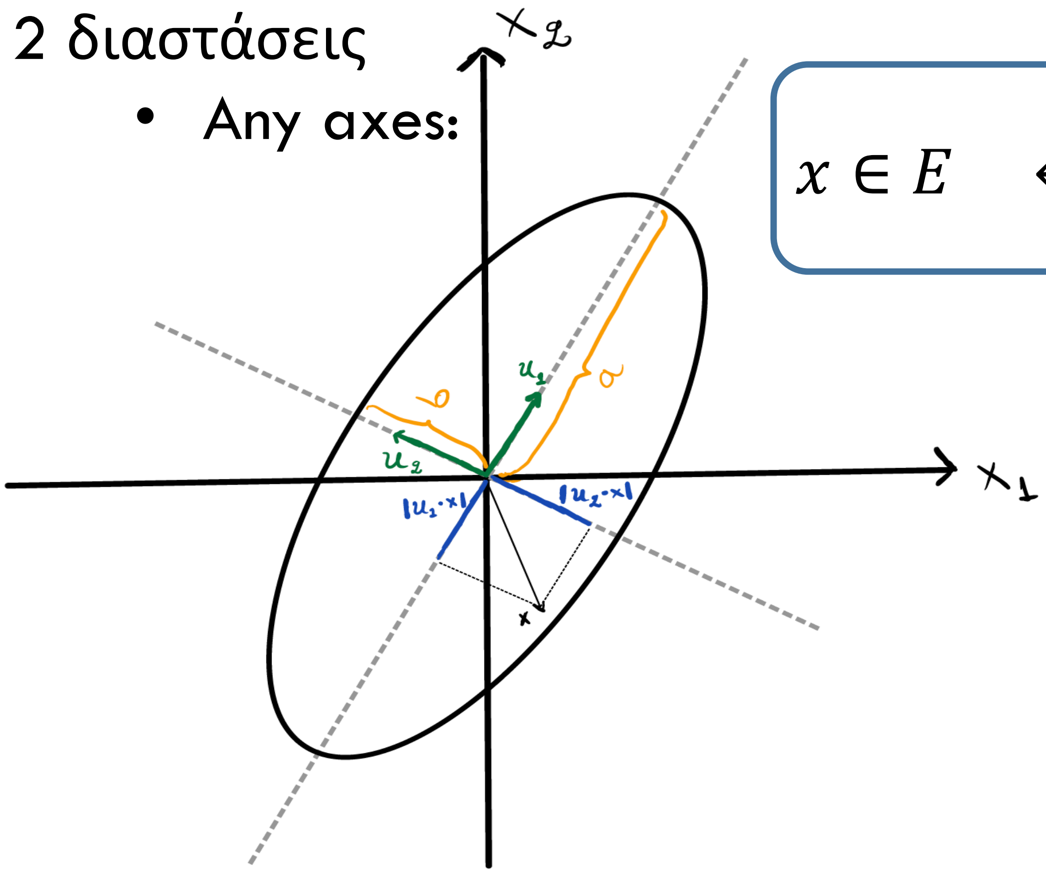
  - Any axes:



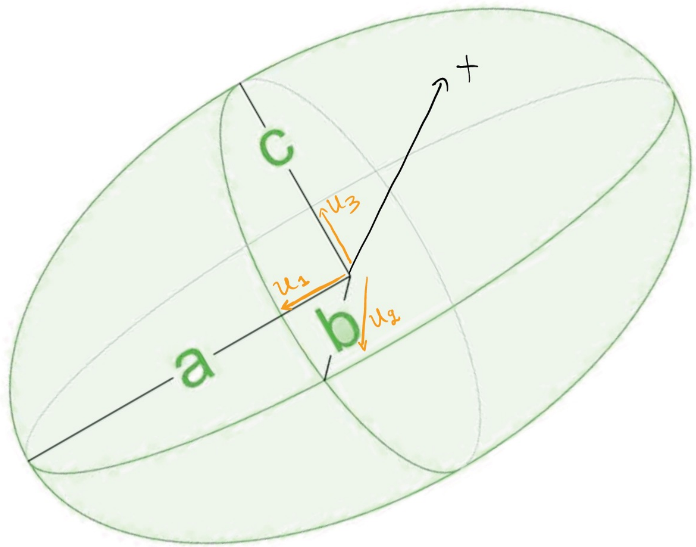
$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} \leq 1$$

Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Any axes:



$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} \leq 1$$



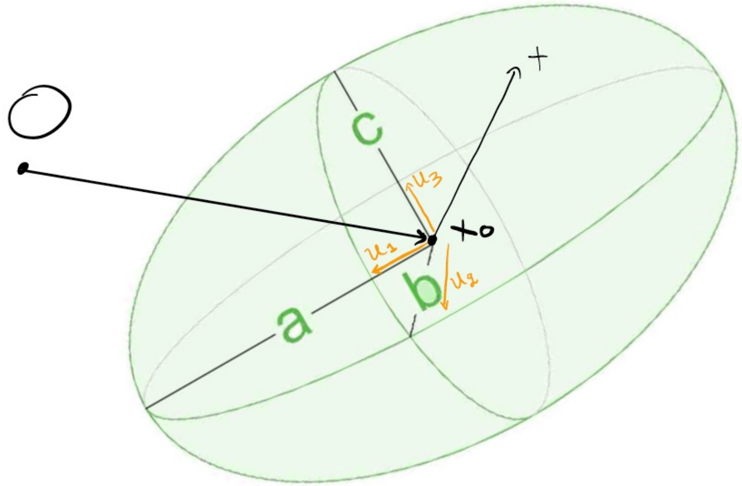
- 3 διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} + \frac{(u_3 \cdot x)^2}{c^2} \leq 1$$

Ελλειψοειδή

- 3 διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot (x - x_0))^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot (x - x_0))^2}{b^2} + \frac{(u_3 \cdot (x - x_0))^2}{c^2} \leq 1$$



- n διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i}\right)^2 \leq 1$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ ορθοκανονικά

$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

Ελλειψοειδή

$$\boxed{x \in E \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i}\right)^2 \leq 1}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & & 0 \\ & 1/a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/a_n \end{pmatrix}$$

$$U = (u_1 \vdots u_2 \vdots \dots \vdots u_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i}\right)^2 = \|\Lambda U^T (x - x_0)\|^2$$

$$= (\Lambda U^T (x - x_0))^T \left(\Lambda U^T (x - x_0)\right) \qquad (\|z\|^2 = z^T z)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \mathrm{U} \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda U^T (x - x_0)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}} (x - x_0)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, (x - x_0)$$

$\boldsymbol{A}$: **θετικά ορισμένος**

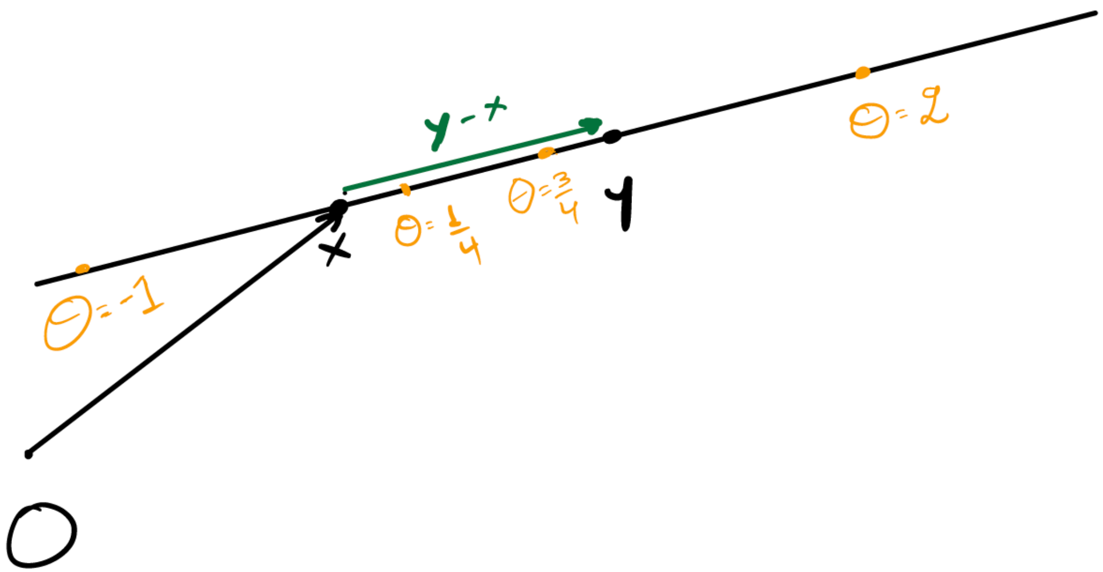
$$\boxed{x \in E \quad \leftrightarrow \quad (x - x_0)^{\mathrm{T}} A\, (x - x_0) \leq 1}$$

Κυρτά σύνολα

- Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Η ευθεία που τα ενώνει ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\{\, x + \theta(y - x) \mid \theta \in \mathbb{R} \,\}$$

- Γιατί;
- Γενικεύει την ευθεία στο επίπεδο ($n = 2$) και στο χώρο ($n = 3$)
- $n = 3$:

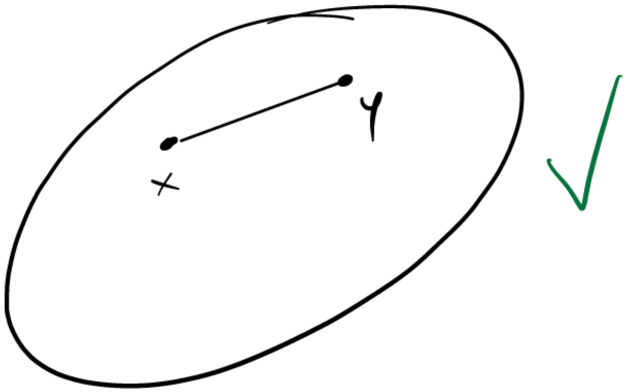


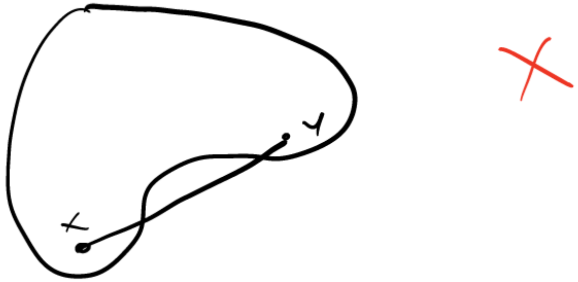
- Ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ x, y: $[x, y] \coloneqq \{x + \theta(y - x) \mid \theta \in [0,1]\}$

$$= \{(1 - \theta)x + \theta y \mid \theta \in [0,1]\}$$

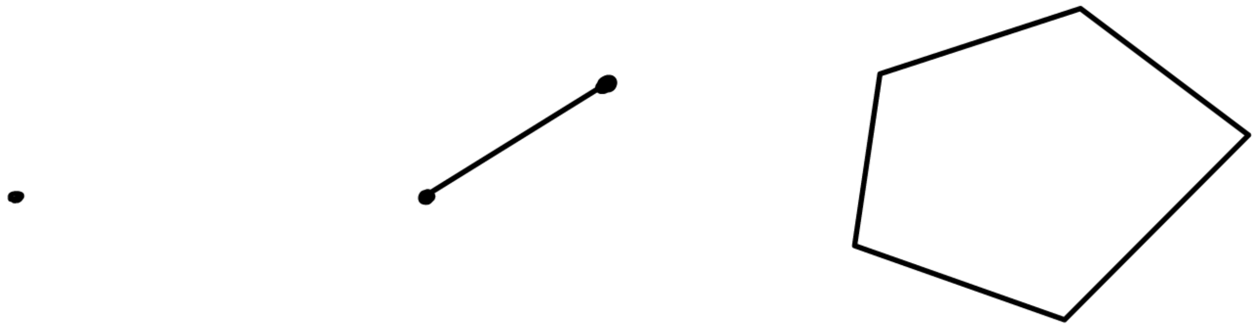
Κυρτά σύνολα

- **Ορισμός:** $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{K}$, $[\mathrm{x}, \mathrm{y}] \subseteq \mathrm{K}$.



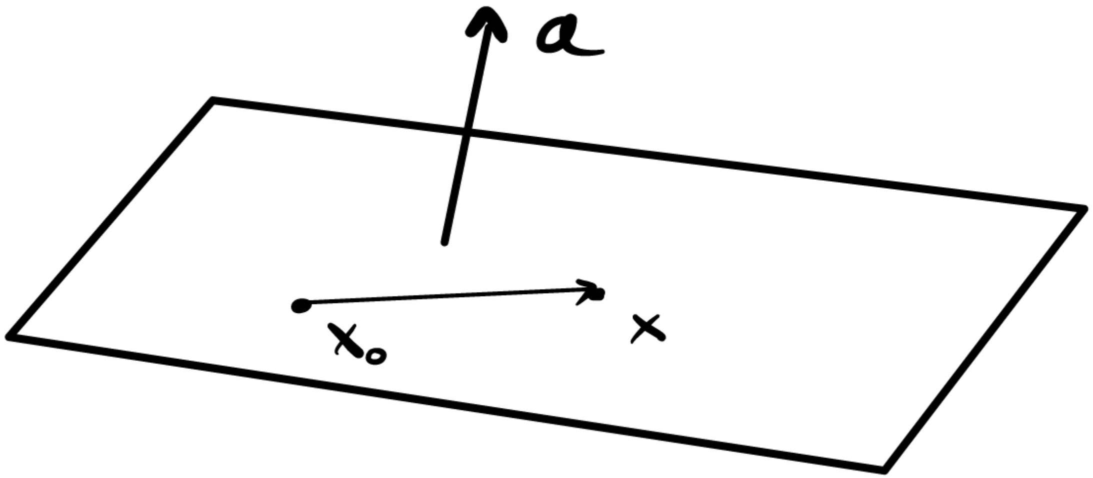


- Άλλα δισδιάστατα παραδείγματα:



Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^n$

- Υπερεπίπεδα: $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b \,\}, \quad a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
  - Γιατί;
  - Γενικεύει το επίπεδο:



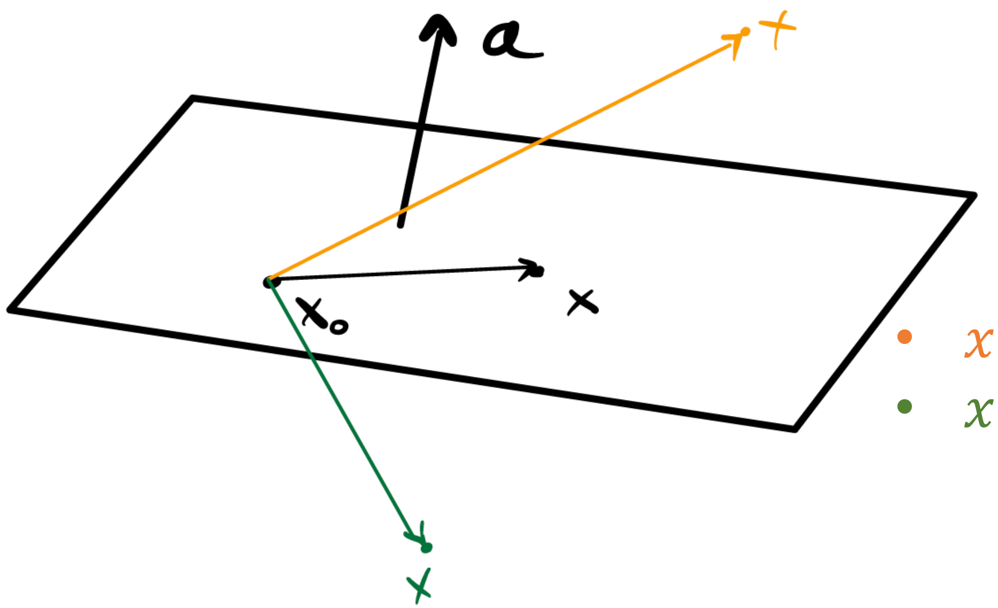
$$a \cdot (x - x_0) = 0 \longrightarrow a \cdot x = \underbrace{a \cdot x_0}_{:=\, b}$$

  - Απόδειξη κυρτότητας;

$$a \cdot x = b, \quad a \cdot y = b \quad \longrightarrow \quad a \cdot \big((1-\theta)x + \theta y\big) = (1-\theta)b + \theta b = b$$

Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

- Ημιχώροι: $\{\, x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid a \cdot x \leq b \,\}, \quad a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
  - Γενικεύει τους 3d ημιχώρους



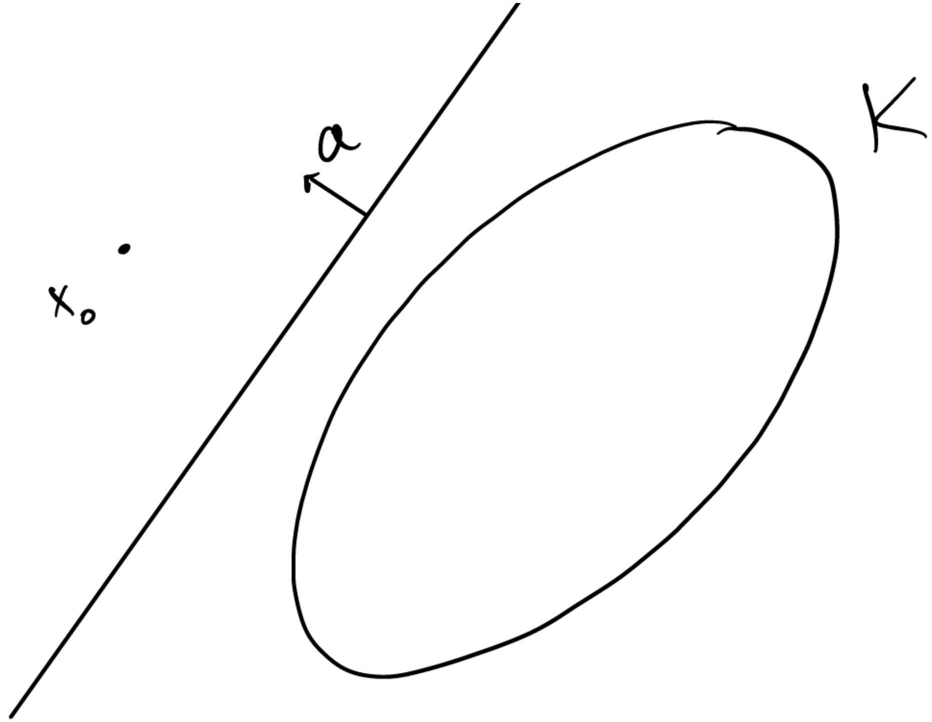
- x πάνω απ’ το επίπεδο: $a \cdot (x - x_0) > 0$
- x κάτω απ’ το επίπεδο: $a \cdot (x - x_0) < 0$

  - $n = 2$: ημιχώρος = ημιεπίπεδο.
  - Απόδειξη κυρτότητας; Άσκηση!

Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^n$

- Μπάλες: $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r \,\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$
- Ελλειψοειδή
- Αποδείξεις και περισσότερα κυρτά σύνολα, την άλλη φορά!

Θεώρημα Διαχωριστικού Υπερεπιπέδου



Θεώρημα:

Έστω $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ κυρτό και κλειστό. Έστω σημείο $\mathrm{x}_0 \notin \mathrm{K}$.

Τότε, $\exists a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \cdot x_0 > b$$
$$a \cdot x < b, \quad \forall x \in K$$

Υπενθύμιση από Ανάλυση

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής:

Έστω $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ κλειστό και φραγμένο (συμπαγές).

Έστω $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο K.