

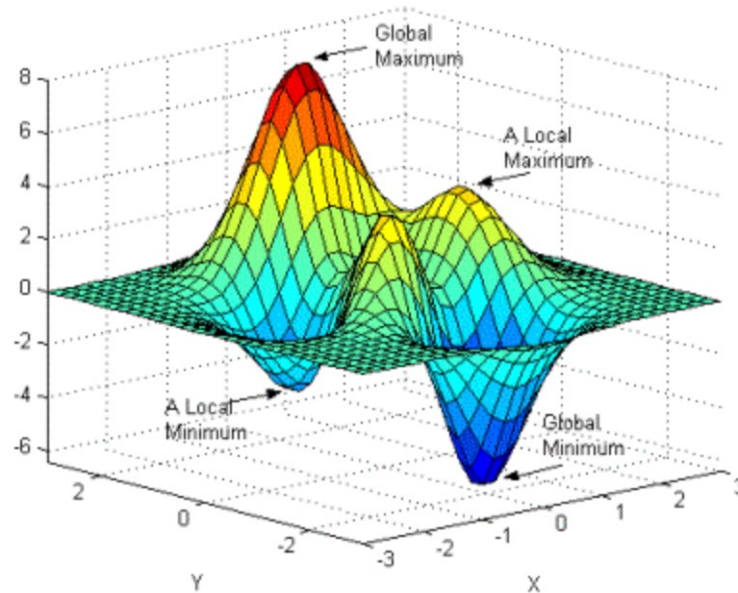
Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Μέρος Β΄

Ορέστης Πλευράκης

Κυρτή Βελτιστοποίηση

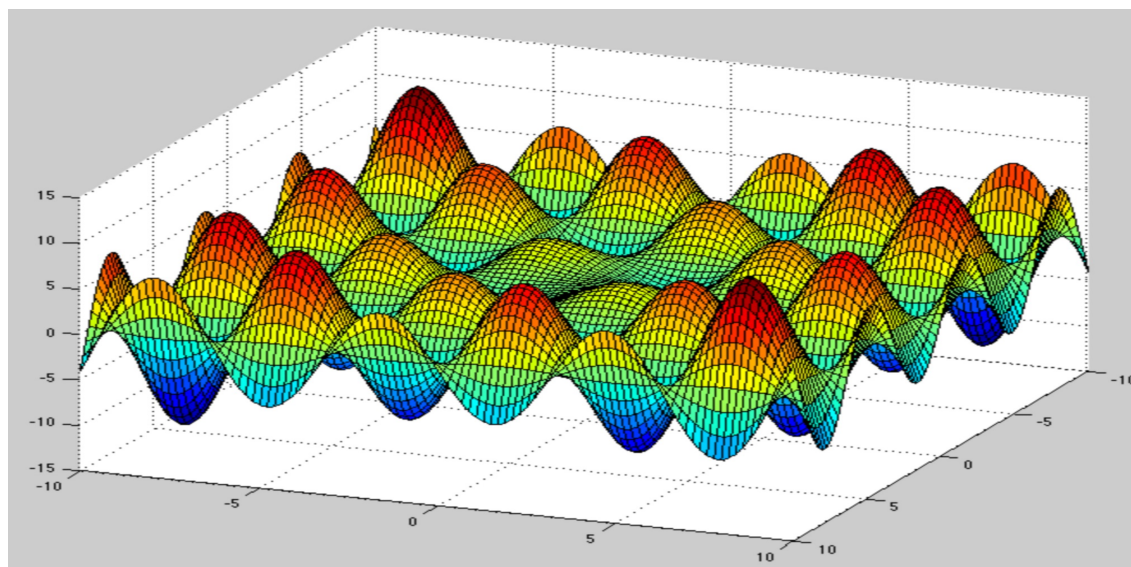
- Βελτιστοποίηση: έχουμε μια $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
στόχος: να βρούμε ένα $x_* \in S$, ώστε $f(x_*) = \min_{x \in S} f(x)$
- Συνεχής βελτιστοποίηση: τα $x \in S$ έχουν συνεχές εύρος τιμών, f : συνεχής



Εφαρμογές: θεωρητική πληροφορική, machine learning, θεωρία ελέγχου, φυσική κ.α.

Κυρτή Βελτιστοποίηση

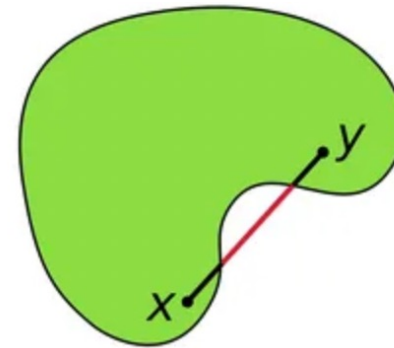
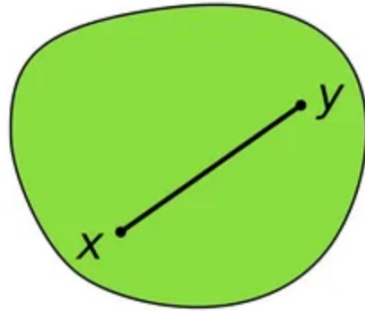
- Συνεχής βελτιστοποίηση: υπολογιστικά δύσκολη



Κυρτή Βελτιστοποίηση

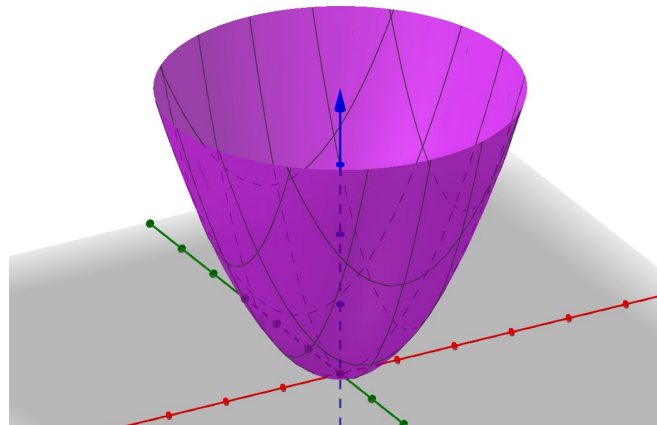
- Κυρτή βελτιστοποίηση:

✓ S κυρτό:



μη κυρτό

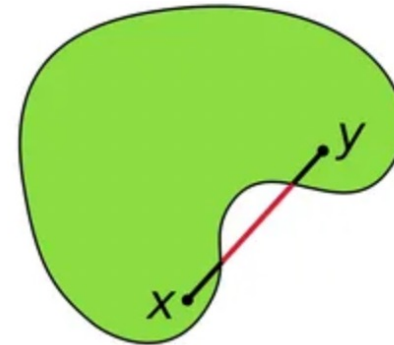
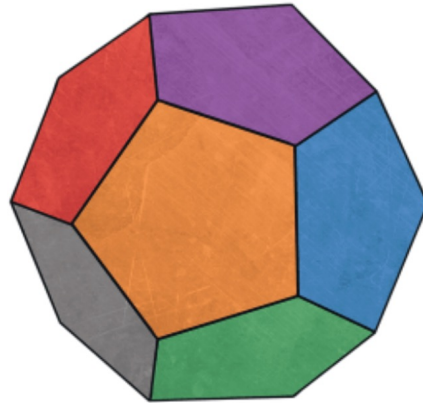
✓ f κυρτή:



Κυρτή Βελτιστοποίηση

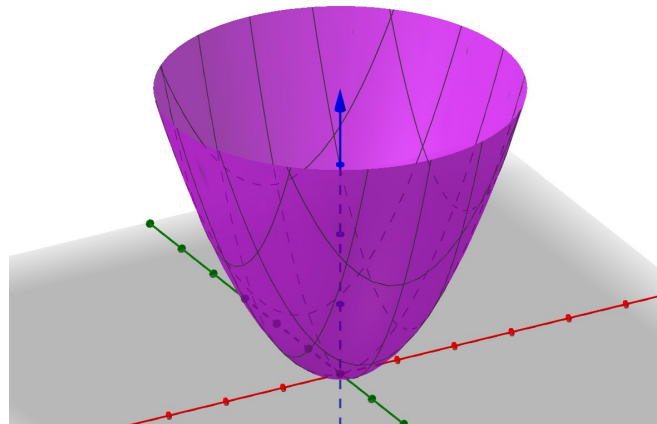
- Κυρτή βελτιστοποίηση:

✓ S κυρτό:



μη κυρτό

✓ f κυρτή:



Στόχος του μαθήματος

Γενικές τεχνικές σκέψης για το διάβασμα, για επίλυση δύσκολων προβλημάτων, και για την έρευνα.

- Έχουν περιγραφεί από τους Terence Tao, Michael Atiyah (Fields medalists) κ.α.
- Edward Burger, Michael Starbird: «Τεχνικές αποτελεσματικής σκέψης»
(Αναφορές στο site)

Υπόλοιπη Διάλεξη

- 1) Ποιες είναι οι τεχνικές.
- 2) Πώς μέσα από το μάθημα θα εξασκηθείτε σε αυτές.

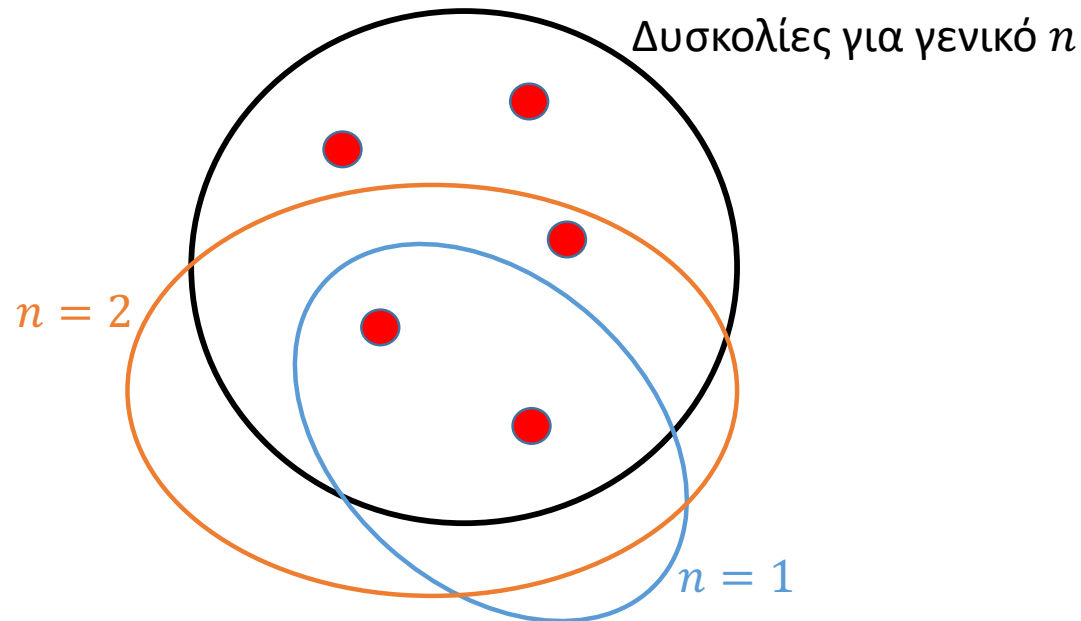
Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

1. Παίξτε με παραδείγματα!

- Αποκτάτε διαίσθηση.
- Μπορείτε να ανακαλύψετε patterns, που δε θα τα βλέπατε σκεπτόμενοι τη γενική περίπτωση.

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

2. Προσπαθήστε να λύσετε ειδικές περιπτώσεις.
 - Πχ πρόβλημα στον \mathbb{R}^n . Προσπαθήστε να το λύσετε για $n = 1, n = 2, \dots$
 - Τί κερδίζουμε: απομόνωση δυσκολιών, ιδέες για τη γενική περίπτωση.



3. Φτιάξτε ένα νέο πρόβλημα/στόχο (όχι αναγκαστικά ειδική περίπτωση) που να απομονώνει λίγες δυσκολίες.

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

4. Αποτύχετε παραγωγικά!

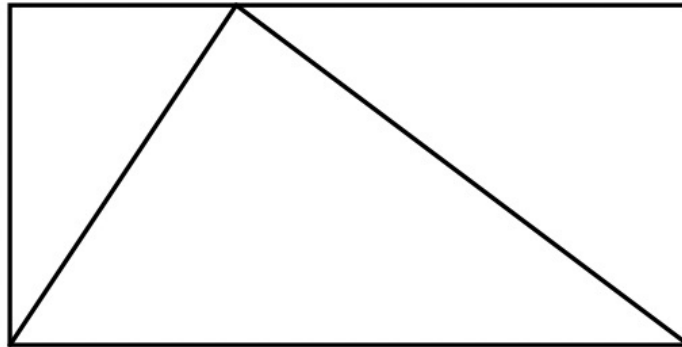
- Για να λύσεις ένα ερευνητικό πρόβλημα είναι απαραίτητο να δοκιμάσεις προσεγγίσεις που δε θα δουλέψουν.
- Από μόνη της η αποτυχία δεν αρκεί.
- Πρέπει να κοιτάξεις προσεκτικά, για να **καταλάβεις** τί δε δούλεψε.
- Έτσι, 1) μπορείς να δείς τί χρειάζεται να αλλάξεις.
2) μπορεί να δουλεύει για κάποιες περιπτώσεις, οπότε από δώ και πέρα εστιάζεις στις υπόλοιπες.
3) διαφορετικές προσεγγίσεις μπορεί να αποτυγχάνουν για συμπληρωματικούς λόγους → συνδυάσε τες!

Andrew Wiles about his key idea for proving Fermat's last Theorem:

“Almost what seemed to be stopping the method of Flach and Kolyvagin was exactly what would make horizontal Iwasawa theory work!”

Αν αποδείξαμε κάτι, τότε καταλάβαμε πραγματικά γιατί ισχύει αυτό που αποδείξαμε;

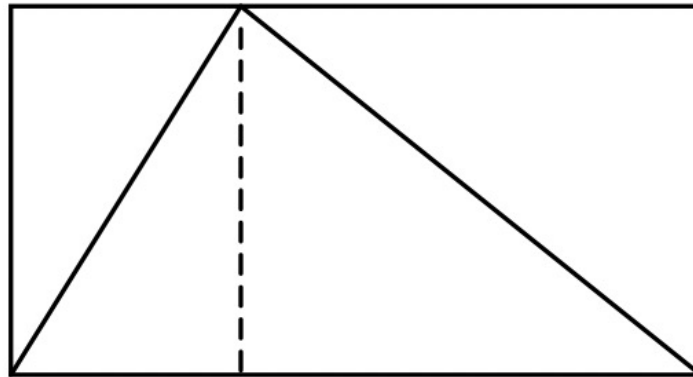
Τι ποσοστό του κουτιού καταλαμβάνει το τρίγωνο;



$$\text{Επιφάνεια τριγώνου} = \text{βάση} * \text{ύψος} / 2$$

Αν αποδείξαμε κάτι, τότε καταλάβαμε πραγματικά γιατί ισχύει αυτό που αποδείξαμε;

Τι ποσοστό του κουτιού καταλαμβάνει το τρίγωνο;



Michael Atiyah, Fields Medalist

"I believe the search for an explanation, for understanding, is what we should really be aiming for. Proof is simply part of that process, and sometimes its consequence."

Σε δύσκολα προβλήματα: προσπαθήστε να βελτιώνετε σταδιακά την κατανόησή σας.

- Βρείτε ενδιαφέροντα παραδείγματα.
- Βρείτε τρόπους οπτικοποίησης.
- Καταλάβετε γιατί οι γνωστές μέθοδοι αποτυγχάνουν.
- Καταλάβετε βαθύτερα την υπάρχουσα θεωρία.

...

} Διαίσθηση!

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

Αφού ο στόχος είναι να καταλάβουμε...

5. Διατυπώστε ερωτήσεις!

- Συγκεκριμενοποιείς τι δεν έχεις καταλάβει.
- Είναι ενδιάμεσοι στόχοι.
- Αν δε μπορείς να απαντήσεις μια ερώτησή σου, θέσε μια απλούστερη.

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

- Κάνε ερωτήσεις για να ξεκαθαρίσεις το τοπίο, ακόμα και αν δε φαίνεται πώς ακριβώς οι απαντήσεις θα οδηγήσουν στη λύση.

Παράδειγμα: προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Minimum Vertex Cover**

Ορισμός: Έστω $G(V, E)$. Ένα $S \subseteq V$ ονομάζεται vertex cover αν κάθε $e \in E$ ακουμπάει σε ένα τουλάχιστον $v \in S$.

Minimum Vertex Cover:

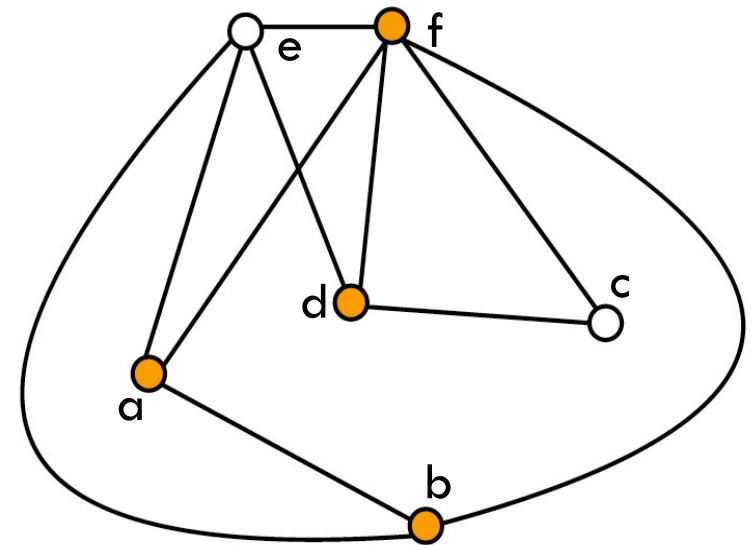
Input: $G(V, E)$

Output: vertex cover ελάχιστης πληθικότητας

NP complete.

Υπάρχει **2-προσεγγιστικός** αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου

Επιστρέφει πάντα vertex cover πληθικότητας $\leq 2OPT$

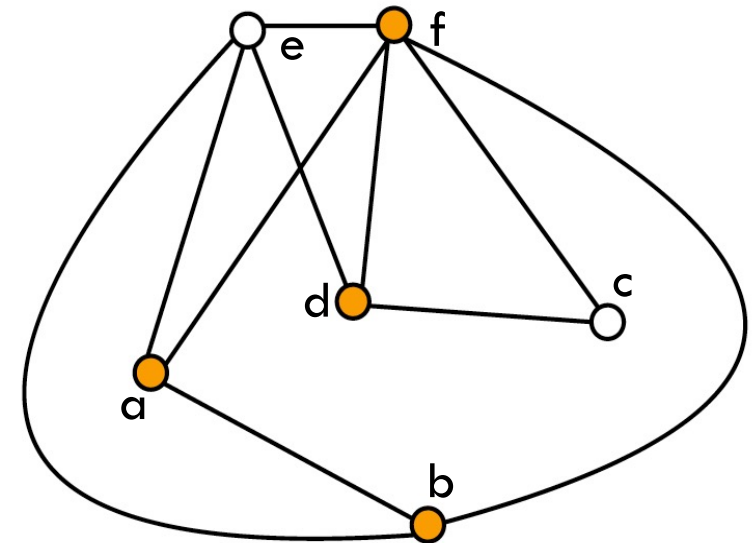


Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

- Κάνε ερωτήσεις για να ξεκαθαρίσεις το τοπίο, ακόμα και αν δε φαίνεται πώς ακριβώς οι απαντήσεις θα οδηγήσουν στη λύση.

Παράδειγμα: προσεγγιστικός αλγόριθμος για το [Minimum Vertex Cover](#)

Ερώτηση: “Είμαστε σίγουροι ότι το $OPT = 4$?
Η τουλάχιστον ότι $OPT \geq 3$?
Μπορούμε να το μάθουμε χωρίς brute-force?”



Υπάρχει **2-προσεγγιστικός** αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου

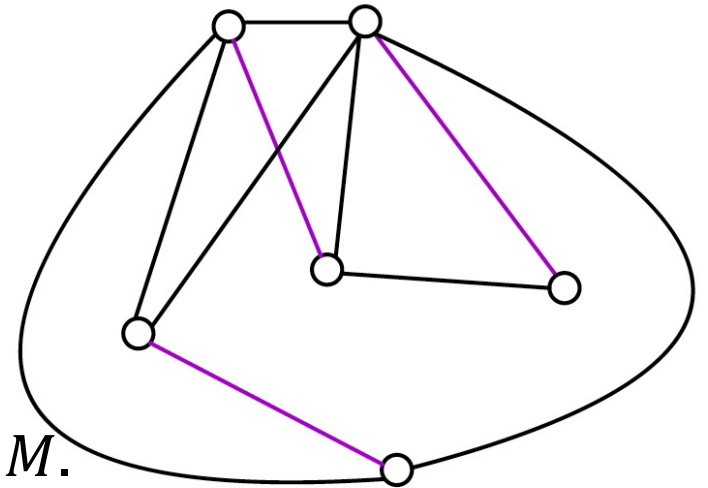
Επιστρέφει πάντα vertex cover πληθικότητας $\leq 2OPT$

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

- Κάνε ερωτήσεις για να ξεκαθαρίσεις το τοπίο, ακόμα και αν δε φαίνεται πώς ακριβώς οι απαντήσεις θα οδηγήσουν στη λύση.

Παράδειγμα: προσεγγιστικός αλγόριθμος για το **Minimum Vertex Cover**

Ερώτηση: “Είμαστε σίγουροι ότι το $OPT = 4$?
Η τουλάχιστον ότι $OPT \geq 3$?
Μπορούμε να το μάθουμε χωρίς brute-force?”



Για γενικό $G(V, E)$, $OPT \geq |M|$, για κάθε **matching** M .

Αλγόριθμος:

- Βρές **maximal** matching M (poly-time)
- Επίστρεψε όλες τις κορυφές των ακμών του M . ($2|M|$ κορυφές)

Επιστρέφει πάντα vertex cover (γιατί;)

2-προσεγγιστικός (γιατί;)

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

1. Πειραματίσου με παραδείγματα.
2. Προσπάθησε να λύσεις ειδικές περιπτώσεις.
3. Βρές απλούστερα προβλήματα, και δούλεψε σε αυτά.
4. Απότυχε παραγωγικά.
5. Διατύπωνε ερωτήσεις.

Στόχος του μαθήματος: να μάθετε να τις εφαρμόζετε αποτελεσματικά, για να γίνετε καλύτεροι στην επίλυση προβλημάτων, στο διάβασμά σας, και στην έρευνα.

Τεχνικές Αποτελεσματικής Σκέψης

Στόχος του μαθήματος: να μάθετε να τις εφαρμόζετε αποτελεσματικά, για να γίνετε καλύτεροι στην επίλυση προβλημάτων, στο διάβασμά, και στην έρευνα.

Πώς θα επιτευχθεί;

1. Διαλέξεις:

Θα βλέπουμε πώς μπορούμε να ανακαλύψουμε τις ιδέες/αποδείξεις, ακολουθώντας τις τεχνικές.

2. Προβλήματα

- 1 πρόβλημα/εβδομάδα.
- Deadline: αρχή της διάλεξης.
- Μετά το deadline θα αναρτάται τη λύση στο site με εξήγηση του πώς φτάνουμε σ' αυτή μέσω των τεχνικών.
- Ώρες «γραφείου»: Webex