Πρόβλημα Ανάθεσης Εργασιών

Επιλεγμένα Θεματα Αλγορίθμων

ΑΛΜΑ, ΣΗΜΜΥ

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Καθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \in & \{0,1\}, & \forall i,j \end{array}$$

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \geq & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Καθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \in & \{0,1\}, & \forall i,j \end{array}$$

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

Η ‘γενίκευση’ είναι πρόβλημα μεταφοράς με ακέραιες βέλτιστες λύσεις.
(ακέραιες: Μπορούμε να σπάμε κύκλους χωρίς να αυξάνεται το κόστος)

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Διαισθητικά:

- Κάθε εργασία έχει κάποιο δικό της ελάχιστο κόστος
- Από άτομο σε άτομο αλλάζει το πόσο παραπάνω από αυτό το κόστος χρεωνόμαστε
- Προσθαφαιρώντας, απλά αλλάζουμε το ελάχιστο κόστος
- Αντίστοιχη λογική δουλεύει και για τα άτομα

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j: $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j.
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε x_{ij}'s):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i (u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j (v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j \end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ και $\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια x_{ij}'s

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j: $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j.
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε $x_{ij}{}'s$):

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i(u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j(v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j\end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ και $\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια $x_{ij}{}'s$

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Μεγιστοποίηση κέρδους

Αν μεγιστοποιούμε κέρδος αντί ελαχιστοποιούμε κόστος

- Αντίστοιχη (με την πιο κάτω) ιδέα δουλεύει ή απλά ανάγουμε σε ελαχιστοποίηση:

$$\max \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = \min - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

- Το $-\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ ελαχιστοποιείται στα ίδια σημεία με το

$$nM - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = M \sum_{i,j} x_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j} (M - c_{ij}) x_{ij},$$

όπου $M = \max_{i,j}\{c_{ij}\}$

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\begin{array}{rcll} \min & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \mu_i) & \\ \lambda_i + \mu_j & \leq c_{ij}, & \forall i,j \in [n] \end{array}$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_{i}(\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j)\in M}(\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij}x^*_{ij}$$

όπου $x^*_{ij} = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x^*_{ij} = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i,j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}, \quad \forall i,j \in [n]$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j)\in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x^*_{ij}$$

όπου $x^*_{ij} = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x^*_{ij} = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\begin{array}{rcll} \min & & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i, j \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \max & & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) & \\ \lambda_i + \mu_j & \leq & c_{ij}, & \forall i, j \in [n] \end{array}$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που ‘ακουμπά’ όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j)\in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x^*_{ij}$$

όπου $x^*_{ij} = 1$ αν $(i, j) \in M$ και $x^*_{ij} = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ → καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ → καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ → καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος

Υλοποίηση της προηγούμενης ιδέας επάνω στον πίνακα κόστους (αν και προηγήθηκε αυτής)

Υπενθύμιση: Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό

1. Από κάθε γραμμή/στήλη αφαίρεσε το ελάχιστο στοιχείο της
2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα 0 με ελάχιστο πλήθος ευθειεών
4. Από τα μη καλλυμένα στοιχεία αφαίρεσε το μικρότερο από αυτά, πρόσθεσέ το στις τομές ευθειών και πήγαινε στο βήμα 2

Αντιστοιχία:

- Τα ακάλυπτα στοιχεία αντιστοιχούν σε ακμές μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από οριζόντια ευθεία: από $A \setminus A'$ σε $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από κάθετη ευθεία: από A' σε Δ' (σφιχτές)
- Τα καλυμμένα από δυο ευθείες σε ακμές από $A \setminus A'$ σε Δ'
- Οι τιμές στον πίνακα κρατούν 'απόσταση' από 'σφιχτότητα'

Παράδειγμα

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	8
δ	4	0	7	33

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	4
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα:
$\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$
με κόστος:
$17+16+6+12=51$

Παράδειγμα

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	5
δ	4	0	7	33

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	1
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα:
$\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$
με κόστος:
$17 + 16 + 6 + 12 = 51$

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	3
γ	2	34	0	7
δ	1	12	0	26

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Προσθαφαίρεση *min*

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Προσθαφαίρεση *min*

	a	b	c	d
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

Μέγιστο ταίριασμα

	a	b	c	d
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

Μέγ. Ταίρ.: $\{(\alpha, d), (\beta, b), (\gamma, c), (\delta, a)\}$. Κόστος: $23 + 12 + 4 + 20 = 59$

Εύρεση Μέγιστου Ταιριάσματος

Στο βήμα 2 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.

Εύρεση μέγιστου ταιριάσματος (με augmenting paths):

- Φτιάξε το γράφημα που ορίζουν οι ακμές κόστους 0
- Ξεκίνα από τυχαίο (υποβέλτιστο) ταίριασμα
- Ξεκινώντας από ακάλυπτες αριστερές κορυφές κάνε ΑΚΠ χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Αν βρεις μεγιστικό μονοπάτι στην ΑΚΠ που καταλήγει σε ακάλυπτη δεξιά κορυφή
  - βγάλε τις ζυγές ακμές του μονοπατιού από το ταίριασμα και
  - βάλε τις μονές ακμές του μονοπατιού στο ταίριασμα
- Πήγαινε στο βήμα 2 μέχρι να μην βρίσκεις τέτοιο μονοπάτι

Εύρεση Ελάχιστων Ευθειών

Στο βήμα 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Δεδομένου μέγιστου ταιριάσματος από 0 οι ελάχιστες ευθείες εύκολα:

- Σημείωσε κάθε γραμμή που δεν έχει 0 στο ταίριασμα
- Σημείωσε κάθε στήλη που έχει 0 σε (νεο)σημειωμένη γραμμή
- Σημείωσε κάθε γραμμή που έχει 0 στο ταίριασμα σε (νεο)σημειωμένη στήλη
- Επανάλαβε από το βήμα 2 μέχρι να μην υπάρχει ‘πρόοδος’
- Αν όχι άλλη ‘πρόοδος’ τράβα ευθείες σε ασημείωτες γραμμές και σημειωμένες στήλες

Στην ουσία κάναμε την ΑΚΠ που δίνει A' και Δ'

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('μεταφρασμένο')

Το μέγιστο ταίριασμα από 0 ισούται με
το ελάχιστο 'κάλυμμα' των 0 από ευθείες

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda_i + \mu_j &\geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0 \end{aligned}$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \leq & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} & \leq & 1, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall (i,j) \in E \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \lambda_i + \mu_j & \geq & 1, & \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j & \geq & 0 & \end{array}$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

3. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
4. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \leq & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} & \leq & 1, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall (i,j) \in E \end{array}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\begin{array}{rcll} \lambda_i + \mu_j & \geq & 1, & \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j & \in & \{0,1\}, & \forall i,j \end{array}$$