



Θεωρητική Πληροφορική Ι - Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα ΙΙ

1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2015-2016

Η παράδοση της εργασίας:

- είναι απαραίτητη προϋπόθεση για προβιβάσιμο βαθμό στο μάθημα.
- γίνεται ηλεκτρονικά στο *moodle* του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)
- πρέπει να γίνει μέχρι την 11/1/2016.

Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε την βιβλιογραφία, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για οτιδήποτε χρησιμοποιήσετε.

Η μη αναφορά των πηγών συνιστά λογοκλοπή, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.

Άσκηση 1

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \dots, n_k) = \max\{n_1, \dots, n_k\}$$

όπου το k δεν είναι σταθερό, π.χ. $f(1, 3, 5, 7) = 7$, $f(3, 6, 3, 6, 6, 4, 6) = 6$ κλπ.

Άσκηση 2

Ορίζουμε μια δισδιάστατη Μηχανή Turing ως μία MT που η κάθε ταινία της είναι ένα άπειρο διακριτό επίπεδο (grid), δηλαδή η MT μπορεί εκτός από δεξιά-αριστερά να κινείται και πάνω-κάτω. Δείξτε ότι για κάθε (Time-Constructible) συνάρτηση $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ και κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, αν η L αποφασίζεται από μία δισδιάστατη TM σε χρόνο $T(n)$, τότε $L \in \mathbf{DTIME}[T^2(n)]$.

Άσκηση 3

α'. Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$.

Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

β'. Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς τις logspace και τις Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο και για την κλάση $\mathbf{DTIME}[n^2]$;

Άσκηση 4

α'. Έστω $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$. Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$. Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα $L_1 \cap L_2$;

β'. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1x_2\dots x_k \mid k \geq 0 \text{ \& } x_1, x_2, \dots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

Άσκηση 5

Ο S. Cook, όρισε μια διαφορετική αναγωγή από αυτές που χρησιμοποιούμε για τα **NP**-complete προβλήματα (αναγωγές κατά Karp, συμβ. \leq_m^P):

Μια γλώσσα L ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο κατά Cook (Cook reducible) σε μία γλώσσα L' (συμβ. $L \leq_T^P L'$) αν υπάρχει μία TM πολυωνυμικού-χρόνου που να αποφασίζει την L , η οποία έχει μία έξτρα (μαγική!) ταινία, τέτοια ώστε όποτε γραφεί ένα string x στην ταινία, μπορεί να μπει σε μια ειδική κατάσταση “ερώτησης”, και τότε σε *μόνο ένα* υπολογιστικό βήμα να έχει την απάντηση για το αν $x \in L'$ ή όχι (θα δούμε ότι αυτό λέγεται “μαντείο” (oracle) για την L').

α'. Δείξτε ότι η Αναγωγή κατά Cook είναι μεταβατική σχέση, δηλαδή: $L_1 \leq_T^P L_2 \wedge L_2 \leq_T^P L_3 \Rightarrow L_1 \leq_T^P L_3$.

β'. Δείτε ότι $L \leq_m^P L' \Rightarrow L \leq_T^P L'$.

γ'. Δείξτε ότι αν η **NP** είναι κλειστή ως προς την αναγωγή κατά Cook, τότε **NP** = **coNP**.

Άσκηση 6

Έστω ότι παραλλάσσουμε την logspace αναγωγή σε μία αντίστοιχη που μπορεί να χρησιμοποιεί πολυωνυμικό χώρο, αντί για λογαριθμικό.

Δείξτε ότι με αυτή την αναγωγή, κάθε μη-τετριμμένη γλώσσα (δηλαδή $L \neq \emptyset, \Sigma^*$) $L \in \mathbf{PSPACE}$ είναι **PSPACE**-complete.

Άσκηση 7

1. Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak [2]) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** ($\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}[\log n]$).
2. Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.