



## Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα II 2η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής  
Χειμερινό Εξάμηνο 2015-2016

Η παράδοση της εργασίας:

-γίνεται ηλεκτρονικά στο moodle του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)

Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε την βιβλιογραφία, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για οτιδήποτε χρησιμοποιήσετε.

Η μη αναφορά των πηγών συνιστά λογοκλοπή, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.

### Άσκηση 1: NP-completeness

1. Δίνεται το πρόβλημα:

Δίνεται ένα (πεπερασμένο) σύνολο  $S$ , μια συλλογή υποσυνόλων του  $S$ , έστω  $\mathcal{C}$ , και ένας φυσικός αριθμός  $K \leq |\mathcal{C}|$ . Υπάρχει μία συλλογή υποσυνόλων του  $S$ , έστω  $\mathcal{B}$ , τέτοια ώστε  $|\mathcal{B}| = K$  και για κάθε  $T \in \mathcal{C}$  να υπάρχει οικογένεια συνόλων  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  της οποίας η ένωση να είναι ακριβώς το  $T$ ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι **NP-complete**. Παραμένει το πρόβλημα **NP-complete** αν για κάθε  $T \in \mathcal{C}$  έχουμε  $|T| \leq 2$ ;

(\*Παρατηρήστε ότι η δομή αυτή είναι το διακριτό ανάλογο της Βάσης Περιοχών στην Ανάλυση.)

2. Δίνεται το πρόβλημα **STEINER TREE**:

Δίνεται γράφος  $G = (V, E)$  με βάρη  $d_{ij} : E \rightarrow \mathbb{N}$ , ένα σύνολο  $M \subseteq V$ , και ένας φυσικός αριθμός  $B$ . Υπάρχει υποδέντρο του  $G$  που να περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του  $M$ , τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών του υποδέντρου να μην υπερβαίνει το  $B$ ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι **NP-complete**. Παραμένει το πρόβλημα **NP-complete** αν όλες οι ακμές έχουν το ίδιο βάρος;

### Άσκηση 2

Έστω γλώσσα  $L \subseteq \Sigma^*$  και κλάση πολυπλοκότητας  $\mathcal{C}$ . Η  $L$  ονομάζεται “low” για την  $\mathcal{C}$  αν  $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$ . Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η γλώσσα  $L$  δεν προσφέρει επιπλέον υπολογιστική δύναμη στην  $\mathcal{C}$  αν την χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο (oracle). Επιπλέον, για δύο κλάσεις πολυπλοκότητας  $\mathcal{C}$  και  $\mathcal{C}'$  λέμε ότι η  $\mathcal{C}'$  είναι low για την  $\mathcal{C}$  αν για κάθε  $L \in \mathcal{C}'$ :  $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$ . Δείξτε ότι:

1.  $\mathbf{P}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$ .

2. Η **BPP** είναι low για την **PP**.

### Άσκηση 3

Θεωρώντας δεδομένο ότι  $\mathbf{ZPP} = \mathbf{RP} \cap \mathbf{coRP}$ , δείξτε ότι μια γλώσσα  $L \in \mathbf{ZPP}$  αποφασίζεται σε χρόνο  $T(n)$  από μία Πιθανοτική Μηχανή Turing που δίνει πάντοτε σωστή απάντηση, και ισχύει:

$$\mathbb{E}[T(n)] \leq 2(p_1(n) + p_2(n))$$

όπου  $n$  το μήκος της εισόδου,  $p_1(n), p_2(n)$  τα πολυώνυμα που φράσσουν τους χρόνους εκτέλεσης της  $\mathbf{RP}$  και  $\mathbf{coRP}$  μηχανής αντίστοιχα, και το " $\mathbb{E}[\cdot]$ " συμβολίζει την μέση ή αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

### Άσκηση 4

Θα μελετήσουμε τον τελεστή " $\mathcal{BP} \cdot$ ", που δρα πάνω σε κλάσεις πολυπλοκότητας, και τις ιδιότητές του:

**Ορισμός 1** Έστω  $\mathbf{C}$  μια κλάση πολυπλοκότητας και  $L \subseteq \Sigma^*$ .  $L \in \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$  αν υπάρχει μία γλώσσα  $A \in \mathbf{C}$ , ένα πολυώνυμο  $p$ , και μία σταθερά  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in \Sigma^*$ :

$$\Pr_{y \in \{0,1\}^{p(|x|)}} [(x; y) \in A \leftrightarrow x \in L] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

1. Δείξτε ότι  $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{BPP}$ .
2. Δείξτε ότι αν  $\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$ , τότε και  $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_1 \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_2$ .
3. Δείξτε ότι  $\mathbf{co}(\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{BP} \cdot (\mathbf{coC})$ . Τι συνεπάγεται αυτή η σχέση αν η  $\mathbf{C}$  είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα;
4. Δείξτε ότι αν η  $\mathbf{C}$  είναι κλειστή ως προς padding<sup>1</sup> τότε  $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$ .

όπου  $\mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  κλάσεις πολυπλοκότητας.

### Άσκηση 5

1. Δείξτε ότι  $\mathbf{PCP}[0, \log n] = \mathbf{P}$ .
2. Δείξτε ότι  $\mathbf{PCP}[\log n, 1] \subseteq \mathbf{NP}$ .
3. Έστω το πρόβλημα GNI (Graph non-isomorphism), που δοθέντων δύο γράφων εξετάζει αν δεν είναι ισομορφικοί. Δείξτε ότι:

$$\mathbf{GNI} \in \mathbf{PCP}[n \log n, 1]$$

(Υπενθυμίζουμε ότι δύο γράφοι  $G = (V, E)$  και  $G' = (V', E')$  λέγονται ισομορφικοί αν υπάρχει μία μετάθεση  $\pi : V \rightarrow V'$  τέτοια ώστε  $(\pi(u), \pi(v)) \in E'$  αν και μόνο αν  $(u, v) \in E$ .)

### Άσκηση 6

Έστω  $\mathbf{SPARSE}$  η κλάση των sparse γλωσσών. Υπενθυμίζουμε ότι μια γλώσσα  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  λέγεται sparse (αραιή) αν έχει το πολύ πολυωνυμικά στοιχεία σε κάθε μήκος string, δηλαδή αν  $|L \cap \{0, 1\}^n| \leq p(n)$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και  $p$  πολυώνυμο. Δείξτε ότι  $\mathbf{SPARSE} \subseteq \mathbf{P}_{/\text{poly}}$ .

<sup>1</sup>Μία κλάση είναι κλειστή ως προς padding αν  $L \in \mathbf{C} \Rightarrow \{x; y | x \in L \wedge y \in \{0, 1\}^*\} \in \mathbf{C}$ .

## Άσκηση 7

1. Ένα μη-ντετερμινιστικό κύκλωμα  $C$  έχει δύο εισόδους  $x = x_1x_2 \cdots x_n$  και  $y = y_1y_2 \cdots y_m$ . Το κύκλωμα  $C$  αποδέχεται το  $x$  αν και μόνο αν  $\exists y C(x, y) = 1$ . Δείξτε ότι κάθε γλώσσα στο **MA** έχει μη-ντετερμινιστικά κυκλώματα πολυωνυμικού μεγέθους.
2. Δείξτε ότι  $\mathcal{BP} \cdot \text{coNP} = \text{coAM}$ .

## Άσκηση 8

Ορίζουμε την κλάση  $S_2^p$  ως το σύνολο των γλωσσών  $L$  για τις οποίες υπάρχει ένα πολυωνυμικά υπολογίσιμο και ισορροπημένο κατηγορήμα  $R$ , τέτοιο ώστε:

- $x \in L \Rightarrow \exists y \forall z R(x, y, z) = 1$
- $x \notin L \Rightarrow \exists z \forall y R(x, y, z) = 0$

όπου  $|y| \leq p(|x|)$ ,  $|z| \leq q(|x|)$  (Το “S” προκύπτει από το Symmetric). Το παραπάνω σημαίνει ότι υπάρχουν δύο “provers” που παρέχουν πιστοποιητικά: Αν  $x \in L$ , υπάρχει πιστοποιητικό  $y$  (που παρέχει ο πρώτος prover), που ανεξάρτητα από το πιστοποιητικό του δεύτερου, η TM αποδέχεται, και ομοίως για την περίπτωση όπου  $x \notin L$ , υπάρχει πιστοποιητικό  $z$  (που παρέχει ο δεύτερος), που ανεξάρτητα από το πιστοποιητικό του πρώτου, η TM απορρίπτει.

1. Δείξτε ότι  $\mathbf{NP} \cup \text{coNP} \subseteq S_2^p \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$ .
2. Ορίζουμε τον αντίστοιχο τελεστή  $\mathcal{S}_2$ , έτσι ώστε  $S_2^p = \mathcal{S}_2 \cdot \mathbf{P}$ , και φυσιολογικά δημιουργείται η ιεραρχία κλάσεων  $S_{2k}^p = \underbrace{\mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_2}_k \cdot \mathbf{P}$ . Δείξτε ότι  $\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq S_{2k}^p \subseteq \Sigma_{2k}^p \cap \Pi_{2k}^p$ .
3. Δείξτε ότι η ιεραρχία αυτή καταρρέει αν και μόνο αν η πολυωνυμική ιεραρχία καταρρέει.
4. Θεωρώντας δεδομένο ότι η κλάση  $S_2^p$  είναι κλειστή ως προς αναγωγές Cook, δείξτε ότι  $\Delta_2^p \subseteq S_2^p$ .

## Άσκηση 9

Δείξτε ότι  $\mathbf{P}^{\mathbf{PP}} = \mathbf{P}^{\#\mathbf{P}}$ .

## Άσκηση 10

Ένα βασικό μειονέκτημα της κλάσης  $\#\mathbf{P}$  είναι ότι δεν περιλαμβάνει αρνητικές συναρτήσεις. Θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την κλάση  $\#\mathbf{P}$ , ως εξής:

Έστω  $\#acc_M(x)$  ο αριθμός των accepting μονοπατιών μιας NTM  $M$ . Ως γνωστόν, μια συνάρτηση  $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  ανήκει στην  $\#\mathbf{P}$  αν υπάρχει μία **NP** TM  $M$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \Sigma^*$ ,  $f(x) = \#acc_M(x)$ .

Αντίστοιχα ορίζουμε την κλάση **GapP**: Μία συνάρτηση  $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{Z}$  ανήκει στην **GapP** αν υπάρχει μία **NP** TM  $M$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \Sigma^*$ ,  $f(x) = \#acc_M(x) - \#rej_M(x)$ , δηλαδή αν η συνάρτηση  $f$  ισούται με την διαφορά του πλήθους των accepting και του πλήθους των rejecting μονοπατιών.

1. Δείξτε ότι αν  $f \in \mathbf{GapP}$ , τότε και  $-f \in \mathbf{GapP}$ .
2. Δείξτε ότι  $\#\mathbf{P} \subseteq \mathbf{GapP}$ .
3. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
  - (α')  $f \in \mathbf{GapP}$ .
  - (β') Η  $f$  μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο  $\#\mathbf{P}$  συναρτήσεων.
  - (γ') Η  $f$  μπορεί να γραφεί ως η διαφορά μιας  $\#\mathbf{P}$  και μιας **FP** συνάρτησης.
4. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, δείξτε ότι  $\mathbf{GapP} \subseteq \mathbf{FP}^{\#\mathbf{P}[1]}$ .