Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Θεωρητική Πληροφορική Ι - Υπολογιστική Πολυπλοκότητα
1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017

Η παράδοση της εργασίας:
-γίνεται ηλεκτρονικά στο *moodle* του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)
-πρέπει να γίνει μέχρι και τις 27/12/2016.

Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε την βιβλιογραφία, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για οτιδήποτε χρησιμοποιήσετε.
Η μη αναφορά των πηγών συνιστά *λογοκλοπή*, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.

Άσκηση 1

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \min\{n_1, \ldots, n_k\}$$

όπου το k δεν είναι σταθερό, π.χ. $f(1, 3, 5, 7) = 1$, $f(3, 6, 3, 6, 6, 4, 6) = 3$ κλπ.

Άσκηση 2

Ορίζουμε μια δισδιάστατη Μηχανή Turing ως μία ΜΤ που η κάθε ταινία της είναι ένα άπειρο διακριτό επίπεδο (grid), δηλαδή μπορεί εκτός από δεξιά-αριστερά να κινείται και πάνω-κάτω. Δείξτε ότι για κάθε (Time-Constructible) συνάρτηση $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, αν η L αποφασίζεται από μία δισδιάστατη TM σε χρόνο $T(n)$, τότε $L \in \textbf{DTIME}[T^2(n)]$.

Άσκηση 3

α΄. Δείξτε ότι $\textbf{NP} \neq \textbf{DSPACE}[n]$.
Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

β΄. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς τις logspace και τις Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο και για την κλάση $\textbf{DTIME}[n^2]$?

Άσκηση 4

Δείξτε ότι αν η γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ είναι πεπερασμένη, τότε $L \in \textbf{DTIME}[n]$.

Άσκηση 5

α'. Έστω $L_1,\ L_2 \in$ **NP**. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και $L_1 \cup L_2 \in$ **NP**. Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα $L_1 \cap L_2$?

β'. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1 x_2 \dots x_k | k \geq 0 \ \& \ x_1, x_2 \dots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

Άσκηση 6

Ο S. Cook όρισε μια διαφορετική αναγωγή από αυτές που χρησιμοποιούμε για τα **NP**-complete προβλήματα (αναγωγές κατά Karp, συμβ. $\leq_m^p$): Μια γλώσσα L ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο κατά Cook (Cook reducible) σε μία γλώσσα L' (συμβ. $L \leq_T^P L'$) αν υπάρχει μία TM πολυωνυμικού-χρόνου με μαντείο την L', που αποφασίζει την L μετά από το πολύ πολυωνυμικές κλήσεις στο μαντείο.

α'. Δείξτε ότι η αναγωγή κατά Cook είναι μεταβατική σχέση, δηλαδή: $L_1 \leq_T^P L_2 \wedge L_2 \leq_T^P L_3 \Rightarrow L_1 \leq_T^P L_3$.

β'. Δείτε ότι $L \leq_m^p L' \Rightarrow L \leq_T^P L'$.

γ'. Δείξτε ότι αν η **NP** είναι κλειστή ως προς την αναγωγή κατά Cook, τότε **NP** $=$ co**NP**.

Άσκηση 7

α'. Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak [2]) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** (**NL** $=$ **NSPACE**$[\log n]$).

β'. Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.