



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

---

## Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2016-17

(ΕΜΠ – ΜΠΛΑ)

Διδάσκων: Α. Παγουρτζής

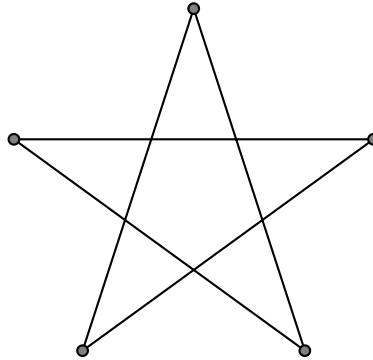
---

1η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 10/4/2017

## Άσκηση 1

Μπορείτε να σχεδιάσετε δύο ευθείες γραμμές στο παρακάτω σχήμα ώστε να εμφανιστούν δέκα μη επικαλυπτόμενα τρίγωνα;



## Άσκηση 2

Ορίζουμε το πρόβλημα Generalized Matching ως εξής: με κάθε κόμβο  $v$  συσχετίζεται μια ακέραια τιμή  $m(v)$  που αντιπροσωπεύει το μέγιστο πλήθος γειτόνων που επιτρέπεται να έχει ο  $v$  στο γενικευμένο ταίριασμα. (Παρατηρήστε ότι το κλασικό Matching είναι η ειδική περίπτωση όπου  $\forall v, m(v) = 1$ .)

Βρείτε αλγόριθμο που να επιλύει βέλτιστα το Generalized Matching σε διμερείς (μη κατευθυνόμενους) γράφους. Εξηγήστε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

## Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι ο παρακάτω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα Vertex Cover:

*δοθέντος ενός γράφου  $G$ , βρες ένα δένδρο με αναζήτηση κατά βάθος (DFS) στον  $G$  και δώσε σαν απάντηση το σύνολο των κόμβων  $S$  που δεν είναι φύλλα*

## Άσκηση 4

Τι προσεγγιστικό λόγο επιτυγχάνει ο αλγόριθμος των διαφανειών για το Vertex Cover (εύρεση *maximal matching* και επιλογή και των δύο άκρων κάθε ακμής του *matching*) αν εφαρμοστεί στο Weighted Vertex Cover; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

## Άσκηση 5

(α) Αποδείξτε τον λόγο προσέγγισης του Greedy αλγορίθμου για το Cardinality Set Cover χρησιμοποιώντας την τεχνική της απόδειξης για το πρόβλημα Maximum Coverage, δηλαδή ότι σε κάθε επανάληψη καλύπτεται τουλάχιστον το  $1/OPT$  των στοιχείων που απομένουν (προσοχή: το  $OPT$  τώρα είναι ο αριθμός των συνόλων της βέλτιστης λύσης – που καλύπτει όλα τα στοιχεία).

(β) Μπορείτε να προσαρμόσετε την απόδειξη ώστε να “δουλέψει” και για το Weighted Set Cover; Τι αντιπροσωπεύει τώρα το  $OPT$ ;

(γ) Τι λόγο προσέγγισης δίνει ο Greedy αν η επιλογή του “καλύτερου” συνόλου δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια αλλά προσεγγιστικά, με λόγο  $\rho$ ; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. (Σημείωση: αυτό συνήθως συμβαίνει όταν τα σύνολα δεν δίνονται αναλυτικά στην είσοδο, αλλά ορίζονται με βάση κάποια ιδιότητα.)

## Άσκηση 6

Συμπληρώστε (όσο μπορείτε καλύτερα) την απόδειξη που θα βρείτε στις διαφάνειες για τον λόγο προσέγγισης  $5/3$  για το πρόβλημα Metric TSP<sub>(s,t)-path</sub>. Συγκεκριμένα, εξηγήστε τον ρόλο του όρου  $c_{s,t}$  στην ανάλυση καθενός από τους δύο επιμέρους αλγορίθμους.

Δώστε tight example για τους επιμέρους αλγορίθμους, καθώς και για τον συνολικό αλγόριθμο.