



## Θεωρητική Πληροφορική I - Υπολογιστική Πολυπλοκότητα 1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής  
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Η παράδοση της εργασίας:

-γίνεται ηλεκτρονικά στην [σελίδα](#) του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)  
-πρέπει να γίνει μέχρι και τις 19/11/2018.

Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε την βιβλιογραφία, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για οτιδήποτε χρησιμοποιήσετε.

Η μη αναφορά των πηγών συνιστά *λογοκλοπή*, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.

### Άσκηση 1

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \dots, n_k) = \min\{n_1, \dots, n_k\}$$

όπου το  $k$  δεν είναι σταθερό, π.χ.  $f(1, 3, 5, 7) = 1$ ,  $f(3, 6, 3, 6, 6, 4, 6) = 3$  κλπ.

### Άσκηση 2

α'. Δείξτε ότι  $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DSPACE}[n]$ .

*Υπόδειξη:* Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

β'. Δείξτε ότι η κλάση  $\mathbf{NP}$  είναι κλειστή ως προς τις logspace και τις Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο και για την κλάση  $\mathbf{DTIME}[n^2]$ ?

### Άσκηση 3

Δείξτε ότι αν η γλώσσα  $L \subseteq \Sigma^*$  είναι πεπερασμένη, τότε  $L \in \mathbf{DTIME}[n]$ .

### Άσκηση 4

α'. Έστω  $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$ . Δείξτε ότι η κλάση  $\mathbf{NP}$  είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και  $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$ . Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα  $L_1 \cap L_2$ ?

β'. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας  $L$  την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \ \& \ x_1, x_2, \dots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

## Άσκηση 5

- α'. Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak [2]) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** ( $\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}[\log n]$ ).
- β'. Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.

## Άσκηση 6

Γράψτε ψευδοκώδικα που να υλοποιεί την απόδειξη του Θεωρήματος Immerman-Szelepcsényi (Θ. 4.20 στο βιβλίο των Arora-Barak). Μπορείτε να δείτε την αντίστοιχη απόδειξη στο βιβλίο του Παπαδημητρίου, όπου περιγράφει την κατασκευή. Ο αλγόριθμός σας, ως μη-ντετερμινιστικός, μπορεί να περιέχει και εντολές τύπου “Choose Nondeterministically” ή “Guess”.