Υπογραμμικοί Αλγόριθμοι

Μάθημα 2 - 08/10/2019

Επιμέλεια Διαφανειών: Δημήτριος Γκένωσης

Ορισμός: Μία οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{H}$, η οποία περιέχει συναρτήσεις $h : [a] \to [b]$ λέγεται **ανά 2-ανεξάρτητη** αν

$$\forall i_1, i_2 \in [a], i_1 \neq i_2 \text{ και } \forall j_1, j_2 \in [b] \text{ έχουμε ότι } \underset{h\sim\mathcal{H}}{\mathbb{P}}[h(i_1) = j_1,\ h(i_2) = j_2] = \frac{1}{b^2}$$

Σύμβαση: Καταχρηστικά θα χρησιμοποιούμε τη φράση 'διαλέγουμε τυχαία μία $k-$ανεξάρτητη συνάρτηση' αντί για 'διαλέγουμε τυχαία μία συνάρτηση από μία $k-$ανεξάρτητη οικογένεια συναρτήσεων'.

Θεώρημα: Υπάρχει μία $k-$ανεξάρτητη οικογένεια συναρτήσεων με $a = b$, και $2^{O(k \log a)}$ στοιχεία.

Πρόβλημα Διακριτών Στοιχείων (Δ.Σ.)

$$\text{initialize()} : x \leftarrow \overrightarrow{0}$$

$$\text{update(i,}\Delta) : x_i \leftarrow x_i + \Delta$$

$$\text{query()} : \tilde{d},\ \text{όπου } \tilde{d} \in \left[\frac{9}{10} \cdot d, \frac{11}{10} \cdot d\right]$$

Έστω $h : [n] \to [n]$ μία τυχαία 2-ανεξάρτητη συνάρτηση.

$$\text{initialize()} : Y \leftarrow 0$$

$$\text{update(i,}\Delta) : Y \leftarrow \max\left\{Y, \text{psb}(h(i))\right\}$$

$$\text{query()} : \text{Return } 2^Y$$

όπου $\text{psb}(h(i))$ η θέση μικρότερου δείκτη (position of significant bit) στη δυαδικη αναπαραστάση του $h(i)$ στην οποία εμφανίζεται μονάδα.

π.χ.: $\text{psb}(01001) = 1$, $\text{psb}(00100) = 3$ και $\text{psb}(01011) = 1$

Εύκολα, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[\text{psb}(h(i)) = 1\big] = \frac{1}{2} \text{ (τα μισά στοιχεία έχουν μονάδα στην πρώτη θέση)}$$
$$\mathbb{P}\big[\text{psb}(h(i)) = 2\big] = \frac{1}{4} \text{ (τα μισά των μισών στοιχεία έχουν μονάδα στη δεύτερη θέση)}$$

και γενικά έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[\text{psb}(h(i)) = j\big] = \frac{1}{2^j},\ \forall j \in [n]$$

Ανάλυση Αλγορίθμου:

Έστω d το πλήθος των διακριτών στοιχείων, δηλαδή ο αριθμός ο οποίος θέλουμε να προσεγγίσουμε. Έστω $l \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε: $2^l \le d \le 2^{l+1}$.

Θέλουμε το $\frac{d}{64} \le \tilde{d} \le 64d$ με $\tilde{d} = 2^Y$. Για να συμβεί αυτό αρκεί

$$\Rightarrow l - 5 \le Y \le l + 5$$

Ανεπιθύμητα Ενδεχόμενα:

Τα ανεπιθύμητα ενδεχόμενα στην ανάλυση του παραπάνω αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

1. $Y \ge l + 6$, δηλαδή υπάρχει δείκτης i που ήρθε ως update τέτοιο ώστε $\text{psb}(h(i)) \ge l + 6$
2. $Y \le l - 6$, δηλαδή για όλους τους δείκτες i που ήρθαν ως update ισχύει $\text{psb}(h(i)) \le l - 6$

Θα θέλαμε καθένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα να συμβαίνει με πιθανότητα $\le \frac{1}{10}$.

Ανεπιθύμητο Ενδεχόμενο 1: Για κάθε $i \in [n]$, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{psb}(h(i)) \ge l + 6 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Z_i] = \frac{1}{2^{l+6}} + \frac{1}{2^{l+7}} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2^{l+5}} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[Z_i] \sim \frac{1}{2^{l+5}}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο ①}\big] &= \mathbb{P}\big[\exists i \text{ που έχει έρθει ως update, } Z_i = 1\big] \\
&= \mathbb{P}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i \geq 1\right] \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i\right]}{1} \\
&= \sum_{i \text{ που έχω δει}} \mathbb{E}[Z_i] = \frac{d}{2^{l+5}} \\
&\leq \frac{2^{l+1}}{2^{l+5}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \leq \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ότι $\mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο ①}\big] \leq \frac{1}{10}$.

<u>Ανεπιθύμητο Ενδεχόμενο ②</u>: Για κάθε $i \in [n]$, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{psb}(h(i)) \geq l - 5 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο ②}\big] = \mathbb{P}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i = 0\right]$.

$$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{P}[Z_i = 1] = \frac{1}{2^{l-5}} + \frac{1}{2^{l-4}} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2^{l-6}} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[Z_i] = \frac{1}{2^{l-6}}}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i\right] = \sum_{i \text{ που έχω δει}} \mathbb{E}[Z_i] = \sum_{i \text{ που έχω δει}} \frac{1}{2^{l-6}} = \frac{d}{2^{l-6}} \geq \frac{2^l}{2^{l-6}} = 64 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}}\right] \leq 32}$$

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i = 0\right] \leq \mathbb{P}\left[\Big|\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i - 64\Big| \geq 64\right] \leq 64^{-2} \cdot \text{Var}\left(\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i\right) \text{ (I)}$$

Αν η h είναι ανά $2-$ανεξάρτητη συνάρτηση, τότε οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ είναι ανά 2 ανεξάρτητες μεταβλητές και άρα για κάθε $i \neq j$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[Z_i Z_j] = \mathbb{E}[Z_i] \cdot \mathbb{E}[Z_j]$$

το οποίο μας αρκεί για να δείξουμε ότι

$$\text{Var}\left(\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i\right) = \sum_{i \text{ που έχω δει}} \text{Var}(Z_i) = d \cdot \text{Var}(Z_1) \text{ (II)}$$

Όμως

$$d \cdot \mathrm{Var}(Z_1) \leq d \cdot \mathbb{E}[Z_i^2] = d \cdot \mathbb{E}[Z_i] \approx d \cdot \frac{1}{2^{l-6}} \leq 128 \text{ (III)}$$

Συνεπώς, η (I) λόγω των (II) και (III) γράφεται ως

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i \text{ που έχω δει}} Z_i = 0\right] \leq 64^{-2} 128 = \frac{1}{32} < \frac{1}{10}$$

Έτσι, έχουμε ότι $\mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο } ②\big] \leq \frac{1}{10}$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητα ενδεχόμενα}\big] =& \mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο } ①\big] + \mathbb{P}\big[\text{ανεπιθύμητο ενδεχόμενο } ②\big] \\ \leq& \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbb{P}\big[\text{επιθυμητό ενδεχόμενο}\big] \geq \frac{4}{5}$$

δηλαδή

$$\mathbb{P}\Big[l - 5 \leq \ Y \leq l + 5\Big] \geq \frac{4}{5}$$

Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου:

- Χώρος: $O(\log n)$
  - $O(\log \log n)$ για την αποθήκευση του Y
  - $O(\log n)$ για την αποθήκευση της h
- Χρόνος Ανανέωσης: $O(1)$
  - $O(1)$ για τον υπολογισμό του $h(i)$
  - $O(\log n)$ (μπορεί να γίνει και σε $O(1)$) για τον υπολογισμό του $\mathrm{psb}(h(i))$
  - $O(1)$ για τον υπολογισμό του max
- Χρόνος Ερώτησης: $O(1)$

Σχόλιο: Από $O(\log n)$ χώρο με $O(1)$ παράγοντα προσέγγισης, μπορούμε να πάμε σε χώρο $O(\epsilon^{-2} \log n)$, και να βρούμε $\tilde{d}$ ώστε με $(1-\epsilon)d \leq \tilde{d} \leq (1+\epsilon)d$ παράγοντα προσέγγισης[α΄].

[α΄] Θα το δούμε στη δεύτερη σειρά ασκήσεων.

Άσκηση 2 (Πρώτη Σειρά Ασκήσεων)

Έστω ένας αλγόριθμος ροής με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{2}{3}$, ο οποίος χρησιμοποιεί χώρο s, έχει χρόνο ανανέωσης t_u και χρόνο ερώτησης t_q. Μπορούμε να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να έχει πιθανότητα επιτυχίας $1-\delta$, ο οποίος χρησιμοποιεί χώρο $s\log(1/\delta)$, έχει χρόνο ανανέωσης $t_u \log(1/\delta)$ και χρόνο ερώτησης $t_q \log(1/\delta)$.

Φράγμα Chernoff:

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όλες 0 ή 1.

Για κάθε $i \in [n]$ έχουμε ότι $X_i = 1$ με πιθανότητα p. Τότε

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot p$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[t \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \lambda \cdot t\right] &= \mathbb{P}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \geq e^{\lambda t}\right] \overset{\text{Markov}}{\leq} \\
&\leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=} \\
&= e^{-\lambda t}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = e^{-\lambda t}\prod_{i=1}^{n}\left(pe^t + (1-p)\cdot e^0\right) \\
&= e^{-\lambda t}\left[pe^t + (1-p)\right]^n
\end{aligned}$$

Για $\lambda = (1+\epsilon)\cdot \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$ και βελτιστοποιώντας ως προς τ παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (1+\epsilon \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right] \leq e^{-c\cdot\epsilon^2\cdot\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}, \text{ αν } \epsilon \leq 1$$

[1].

Μια παρόμοια απόδειξη δουλεύει και την περίπτωση που κοιτάμε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\left[t \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \leq (1-\epsilon)\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

[2]

Συνολικά, παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \notin \left[(1-\epsilon)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right], (1+\epsilon)\left[\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right]\right\} \leq 2e^{-c\cdot\epsilon^2\cdot\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]},$$

[1] Αν $\epsilon \geq 1$ η εξάρτηση του ϵ στον εκθέτη γίνεται απλά γραμμική

[2] Πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάσεις με $-t$ και μετά να υψώσεις τα πάντα στην e, για να εφαρμόσεις $Markov$.

για $\epsilon < 1$. Για $\epsilon \geq 1$ ο εκθέτης γίνεται ϵ.

Θεώρημα 1: Οποιοσδήποτε ντετερμινιστικός αλγόριθμος που δίνει την ακριβή απάντηση στο πρόβλημα (Δ.Σ.) χρησιμοποιεί $\Omega(n)$ χώρο.

Απόδειξη 1: Ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος με χώρο s (s δυφία) είναι ένα ντετερμινιστικό αυτόματο με 2^S καταστάσεις.

Έστω δύο σύνολα S_1, S_2 με $S_1 \neq S_2$ και $|S_1| = |S_2| = d$, τα οποία αν τα τροφοδοτήσουμε στον αλγόριθμο, αυτός καταλήγει στην ίδια κατάσταση x. Αφού $S_1 \neq S_2$, υπάρχει $i \in S_1 \setminus S_2$.

Αν τροφοδοτήσουμε το πρόβλημα (Δ.Σ.) με τα στοιχεία του S_1 και έπειτα το στοιχείο i, θα μεταβούμε αρχικά στην κατάσταση x και έπειτα σε μία νέα κατάσταση του αυτόματου, έστω y. Στην κατάσταση y θα έχουμε φτάσει με $|S_1|$ το πλήθος διακριτά στοιχεία.

Αν τροφοδοτήσουμε το πρόβλημα (Δ.Σ.) με τα στοιχεία του S_2 και έπειτα το στοιχείο i, θα μεταβούμε αρχικά στην κατάσταση x και στην κατάσταση y. Στην κατάσταση y θα έχουμε φτάσει με $|S_2| + 1 = |S_1| + 1$ το πλήθος διακριτά στοιχεία.

Δηλαδή, μπορούμε να φτάσουμε στην κατάσταση y με διαφορετικό πλήθος βημάτων, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, το αυτόματο θα πρέπει πρέπει να έχει τουλάχιστον 2^n καταστάσεις κι άρα

$$2^s \geq 2^n \Rightarrow s \geq n \Rightarrow s = \Omega(n)$$

Λήμμα (Κώδικας Επιδιόρθωσης Λαθών): Υπάρχουν σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq [n]$ με $m = 2^{\Omega(n)}$, έτσι ώστε:

$$|A_i| = \frac{10n}{100},\ \forall i \in [n] \text{ και } |A_i \cap A_j| \leq \frac{2n}{100},\ \forall i, j \in [n],\ i \neq j$$

Θεώρημα 2: Οποιοσδήποτε ντετερμινιστικός προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα (Δ.Σ.) με προσέγγιση $\frac{1}{10}$ χρησιμοποιεί $\Omega(n)$ χώρο.

Απόδειξη 2: Έστω δύο A_1 και A_2 που ανήκουν στον κώδικα επιδιόρθωσης λαθών του Λήμματος.

Από την επιλογή των A_1 και A_2 έχουμε ότι $|A_1 \cap A_2| \leq \dfrac{2n}{100}$ και άρα $|A_1 \setminus A_2| \geq \dfrac{8n}{100}$.

Αν τροφοδοτήσουμε το πρόβλημα (Δ.Σ.) με τα στοιχεία του A_1, τότε θα πρέπει

$$\tilde{d} \in \left[\frac{10n}{100} \cdot \frac{9}{10}, \frac{10n}{100} \cdot \frac{11}{10}\right] = \left[\frac{90n}{1000}, \frac{110n}{1000}\right] \text{ (I)}$$

Αν τροφοδοτήσουμε το πρόβλημα (Δ.Σ.) με τα στοιχεία του A_2 και έπειτα τα στοιχεία του $A_1 \setminus A_2$, τότε θα πρέπει

$$\tilde{d} \in \left[\frac{18n}{100} \cdot \frac{9}{10}, \frac{18n}{100} \cdot \frac{11}{10}\right] = \left[\frac{162n}{1000}, \frac{198n}{1000}\right] \text{ (II)}$$

Από τις (I) και (II) καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς $2^s \geq m \Rightarrow s = \Omega(n)$.

Τώρα αποδεικνύουμε το Λήμμα.

Algorithm 1

Θεώρησε τα σύνολα $[1, 10] \cap \mathbb{N}, [11, 20] \cap \mathbb{N}, \ldots, [10k+1, n] \cap \mathbb{N}$, όπου $n = 10k + \upsilon$

for $i = 1$ to 2^{cn} **do**

  Διάλεξε στην τύχη έναν αριθμό από καθένα από τα παραπάνω σύνολα

  $A_i \leftarrow$ τους $\dfrac{n}{10}$ αριθμούς που διάλεξες

end for

return $(A_i)_{i=1}^{2^{cn}}$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $i, j \in [n]$ με $i \neq j$ έχουμε ότι $|A_i \cap A_j| \leq \dfrac{2n}{100}$.

Ορίζουμε τις ακόλουθες μεταβλητές:

$$X_{i,j}^r = 1, \text{ αν στο } r\text{−οστο διάστημα διαλέξαμε τον ίδιο αριθμό για το } A_i \text{ και το } A_j$$

Έτσι έχουμε

$$\mathbb{E}\big[|A_i \cap A_j|\big] = \mathbb{E}\left[\sum_{r=1}^{n/10} X_{i,j}^r\right] = \sum_{r=1}^{n/10} \mathbb{E}[X_{i,j}^r] = \frac{n}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{n}{100}$$

και

$$\mathbb{P}\left[\sum_{r=1}^{n/10} X_{i,j}^r \geq \frac{2n}{100}\right] \leq e^{-c \cdot \epsilon^2 \cdot \mathbb{E}\left[|A_i \cap A_j|\right]} = e^{-\Omega(n)}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι η πιθανότητα να υπάρχουν δείκτες i, j τέτοιοι ώστε $|A_i \cap A_j| \geq \dfrac{2n}{100}$ είναι

$$\binom{2^{cn}}{2} \cdot e^{-\frac{n}{100}} \ll 1, \text{ αν } c = \frac{1}{500}$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Δείξαμε ότι δεν υπάρχει μη τετριμμένος ντετερμινιστικός (ούτε καν προσεγγιστικός) αλγόριθμος για το πρόβλημα των διακριτών στοιχείων. Στο επόμενο μάθημα θα δούμε ότι δεν υπάρχει και πιθανοτικός ακριβής. Άρα, προσεγγιστικός και πιθανοτικός είναι η μόνη μας ελπίδα, και όντως μας δίνει εκθετικά καλύτερο χώρο! Προς στιγμήν, θα αφήσουμε τα κάτω φράγματα, και θα επιστρέψουμε στη σχεδίαση αλγορίθμων.

<u>AMS sketch:</u>

Θέλουμε να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο ροής που υπολογίζει (προσεγγιστικά και πιθανοτικά) το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών ενός διανύσματος. Έστω $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Αρχικά έχουμε $x = \vec{0}$ και κάθε update (i, Δ) οδηγεί σε $x_i \leftarrow x_i + \Delta$, όπου $i \in [n]$ και $\Delta \in \mathbb{R}$.

Θέλουμε να βρούμε Y τέτοιο ώστε

$$Y \in \left[(1-\epsilon) \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2, (1+\epsilon) \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2\right].$$

$$\begin{aligned}
\text{initialize()} &: \text{Μία 4-ανεξάρτητη τυχαία συνάρτηση } \sigma : [n] \to \{-1, +1\} \\
&\quad Y \leftarrow 0 \\
\text{update(i,}\Delta\text{)} &: y \leftarrow y + \sigma(i) \cdot \Delta \\
\text{query()} &: \text{Output } y^2
\end{aligned}$$

Αν το διάνυσμά μου τη στιγμή που κάνω query είναι $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $y = \sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i$.

Συνεπώς, μας ενδιαφέρει η μεταβλητή $Y = \left(\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i\right)^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i\right)^2\right] && (1) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i \neq j} \sigma(i)\sigma(j) x_i x_j\right] && (2) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\sigma(i)]\mathbb{E}[\sigma(j)] x_i x_j \overset{\mathbb{E}[\sigma(i)]=0}{=} && (3) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2, && (4)
\end{aligned}$$

όπου από την (2) στην (3) πήγαμε χρησιμοποιώντας ότι η σ είναι ανά 4 ανεξάρτητη (αν και μόνο 2 ανεξαρτησία να είχαμε θα επαρκούσε). Άρα, έχουμε ότι $\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (αμερόληπτη εκτίμηση).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)\cdot x_i\right)^4\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\right] \\
&= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\mathbb{E}[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)]x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^4 + \binom{4}{2}\sum_{i\neq j}x_i^2x_j^2 \\
&\leq 6\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + \sum_{i\neq j}x_i^2x_j^2\right) \\
&= 6\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2 = 6\cdot\|x\|_2^4
\end{aligned}
$$

Άρα, έχουμε ότι $\mathbb{E}[Y^2] \leq 6\cdot\|x\|_2^4$. Χρησιμοποιήσαμε κρίσιμα το γεγονός ότι η σ είναι ανά 4-ανεξάρτητη συνάρτηση (πού;). Προσοχή: Στο άθροισμα οι δείκτες i_1, i_2, i_3, i_4 δεν είναι απαραίτητα όλοι διαφορετικοί!

Έτσι, έχουμε ότι

$$
\mathbb{P}\Big[|Y-\mathbb{E}[Y]| \geq \epsilon\cdot\mathbb{E}[Y]\Big] \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\lambda^2} \leq \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\lambda^2} \leq \frac{6\cdot\|x\|_2^4}{\epsilon^2\cdot\|x\|_2^4} = \frac{6}{\epsilon^2}
$$

.

Το παραπάνω φράγμα είναι λίγο κακό, πχ για $\epsilon = 1/10$ δίνει 600, το οποίο είναι τελείως τετριμμένο· Πως μπορεί να σωθεί ο αλγόριθμος· Παίρνουμε s το πλήθος ανεξάρτητες εκτελέσεις του παραπάνω αλγόριθμου, τότε έχουμε ότι

$$
\mathbb{P}\Big[|Y-\mathbb{E}[Y]| \geq \epsilon\cdot\mathbb{E}[Y]\Big] \leq s^{-1}\cdot\frac{\mathrm{Var}(Y)}{\lambda^2} \leq s^{-1}\cdot\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\lambda^2} \leq s^{-1}\cdot\frac{6}{\epsilon^2} \leq \frac{2}{3}
$$

εφόσον $s = \Omega(\epsilon^{-2})$.

<u>Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου:</u>

- Χώρος: $O(\epsilon^{-2} \cdot \log n)$
- Χρόνος Ανανέωσης: $O(\epsilon^{-2})$ (γιατί έχουμε ϵ^{-2} το πλήθος κλήσεις στη συνάρτηση σ)
- Χρόνος Ερώτησης: $O(\epsilon^{-2})$

Αν έχουμε έναν αλγόριθμο ροής και η έξοδος είναι μία τυχαία μεταβλητή με διακύμανση v, τότε αν πολλαπλασιάσουμε χώρο και χρόνο με ζ, τότε παίρνουμε ένα αλγόριθμο η έξοδος του οποίου είναι μια τυχαία μεταβλητή με διακύμανση $\frac{1}{\zeta}$.

Αν έχουμε ένα αλγόριθμο ροής με σταθερή προσέγγιση, ο οποίος έχει έξοδο που είναι σωστή με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και ο αλγόριθμος αναλύεται με Chebyshev, μπορούμε με ϵ^{-2} blow-up να κατεβάσουμε το ποσοστιαίο λάθος στο ϵ.

<u>Ιστορική Αναδρομή:</u>

AMS Sketch, Frequency moment

- Noga, Alon, Mattias Szegedy (1996)
- 100αδες εργασίες
- Indy K (2000): σχεδόν βέλτιστος αλγόριθμος για τον υπολογισμό του $\|x\|_p, \forall p \in [0,2]$ (FOCS Best Paper Award)

<u>Μεγάλο (ανοιχτό) πρόβλημα:</u> Αν δεν έχεις διαγραφές (δηλαδή $\Delta \geq 0$), υπάρχει αλγόριθμος με $(\epsilon^{-2} + \log n) \cdot \text{poly}(\log\log n)$ χώρο;