Υπογραμμικοί Αλγόριθμοι

Μάθημα 4 - 22/10/2019

Επιμέλεια Διαφανειών: Αλέξανδρος Ζέρντεβ

Γραμμική σκιαγράφηση

$$\text{initialize}() : x \leftarrow \vec{0}$$

$$\text{update(i,}\Delta) : x_i \leftarrow x_i + \Delta$$

Σχεδιάζω Φ και κρατάω το $y = \Phi x$ και το Φ στη μνήμη.

- Χώρος: $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ + χώρος για το y
- Χρόνος Ανανέωσης την t-οστή στιγμή:
  - $y(t) = \Phi x^{(t)} = \Phi(x^{(t-1)} + \Delta e_i) = \underbrace{y(t-1)}_{\Phi x^{(t-1)}} + \underbrace{\Delta \cdot \Phi e_i}_{i-th\text{column}}$
  - e_i είναι το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή θέση, και 0 οπουδήποτε αλλού.

    Για παράδειγμα, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - Άρα Ο χειρότερος χρόνος για να υπολογίσεις μια στήλη του Φ
- Δεν μπορούμε να σώσουμε όλο το Φ. Είναι πολύ μεγάλο, μπορεί μέχρι mn λέξεις!
- Για το Φ χρειαζόμαστε συνήθως μία ή δύο μεθόδους: μία μέθοδο που υπολογίζει στο στοιχείο $\Phi_{i,j}$, ή/και μία μέθοδο που υπολογίζει την στήλη $\Phi_i = \Phi e_i$.

AMS σκιαγράφημα:

$$\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{\Theta(\varepsilon^{-2})}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ t_n \end{bmatrix}$$

$\Theta(\epsilon^{-2})$ ανά 4 ανεξάρτητες συναρτήσεις $\sigma_r[n] \to \{-1, 1\}$ για τον r-στό μετρητή.

Για να πάρω την i-στήλη κοιτάω τα $\sigma_1(i), \sigma_2(i), \sigma_3(i)... \to \begin{bmatrix} \sigma_1(i) \\ \sigma_2(i) \\ \sigma_3(i) \\ \vdots \\ \sigma_{\Theta(\varepsilon^{-2})}(i) \end{bmatrix}$

- Υπολογίζω κάθε $\sigma_r(i)$ σε $O(1)$, όλη τη στήλη σε $O(\varepsilon^{-2})$
- Χώρος για το Φ είναι $O(\varepsilon^{-2} \lg n)$ δυφία (ή $O(\varepsilon^{-2})$ λέξεις)

CountMin σκιαγράφημα:

- Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε το CountMin σκιαγράφηματος σαν $R = \Theta(\log n)$ γραμμές από μετρητές, και κάθε $i \in [n]$ ήταν ¨συνδεδεμένο' με ένα μετρητή σε κάθε γραμμή.
- # γραμμών (χώρος ανά συνάρτησή)
  - Σε μορφή πινάκων το Φ του Countmin σκιαγράφημα είναι R πίνακες κάθετα τοποθετημένοι, έτσι ώστε κάθε πίνακας να υποδεικνύει ποιά στοιχεία συνεισφέρουν σε ποιον μετρητή.

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
O(\frac{1}{\varepsilon}) \\
\\
- \\
\\
O(\frac{1}{\varepsilon}) \\
\\
- \\
\\
O(\frac{1}{\varepsilon}) \\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
 & & & i & & & j & & & \\
. & . & . & 0 & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & 0 & . & 0 & . & . & . \\
. & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & . \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
. & . & . & 0 & 1 & . & 0 & . & . & . \\
. & . & . & 0 & 0 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & 0 & . & 0 & . & . & . \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
. & . & . & 0 & 1 & . & 0 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & 0 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & .
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$$
\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} \\ - \\ \Phi^{(2)} \\ \cdots \\ \Phi^{(R)} \end{bmatrix}
$$

Το που είναι οι άσοι στη γραμμή l-οστή γραμμή του $\Phi^{(r)}, r \in [R]$ δείχνει ποιά στοιχεία $i \in [n]$ συνεισφέρουν στον l-οστό μετρητή στην r-οστή επανάληψη. επαναλήψεις.

ε-βαρέα στοιχεία

Υπενθύμιση:Θέλουμε να κρατήσουμε δομή δεδομένων για $x \in R^n$ η οποία βρίσκει μια λίστα L η οποία περιέχει όλα τα i ώστε $|x_i| \geq \varepsilon ||x||_1$ και κανένα i ώστε $|x_i| < \frac{\varepsilon}{2}||x||_1$.

- cash-register (2η Σειρά Ασκήσεων)
  - $\Delta = 1$
- strict turnstile
  - $x_i \geq 0$
- Turnstile

– $x_i \in R$

CountMin για strict turnstile (προηγούμενη διάλεξη)

- Χώρος $O(\varepsilon^{-1} \lg n)$ λέξεις
- Πιθανότητα λαθους $\frac{1}{n^{100}}$

Σήμερα:Υπάρχει ντετερμινιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα ε-βαρέων στοιχείων με χώρο

$$\varepsilon^{-2} \cdot \left(\frac{\lg n}{\lg \frac{1}{\varepsilon} + \lg \lg n} \right)^2$$

λέξεις.

Σημειώνουμε ότι είναι απαραίτητη η τετραγωνική εξάρτηση στο ϵ για ντετερμινιστικούς αλγορίθμους.

Ορισμός:

Ένας πίνακας $A \in R^{m \times n}$ λέγεται ε-(μη συνοχικός) αν $||A_i||_2 = 1$ και $|\langle A_i, A_j \rangle| \leq \varepsilon$ ή

$$A^T A = I + \varepsilon J \in R^{n \times n} \quad J = \begin{bmatrix} \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] \\ \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] & \in [-1,1] \end{bmatrix}$$

Λήμμα: Έστω ένας $A \in R^{m \times n}$ $(\varepsilon/2)$-(μη συνοχικός) πίνακας τον οποίο μπορώ να αποθηκεύσω σε χώρο s_1 μπορώ να βρω μια στήλη του σε χρόνο t_u. Τότε υπάρχει ντετερμινιστικός αλγόριθμος ροής για τα ε-βαρέα στοιχεία με χώρο $S + m$, χρόνο ανανέωσης $t_u + m$ και πολυπλοκότητα χρόνου ερωτήματος $O(nt_u)$, που έρχεται.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσω $\Phi = A$. Θα υπολογίσω κάθε $i \in [n]$ μια εκτίμηση του x_i. Αν η εκτίμηση είναι $\geq \varepsilon ||x||_1$ θα βάλω το i στη λίστα L. Στο strict turnstile μοντέλο μπορώ να υπολογίσω το $\|x\|_1$ με ένα μετρητή, διότι $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n |x_i| = ||x||_1$.

Ο εκτιμητής για κάθε $i \in [n]$ είναι

$$x_i' = \langle y, A_i \rangle = \langle Ay, Ae_i \rangle = (Ax)^T Ae_i = x^T (A^T A) e_i = x^T (I + \varepsilon J) e_i =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \in [-(\varepsilon/2),(\varepsilon/2)] \\ \in [-(\varepsilon/2),(\varepsilon/2)] \\ \in [-(\varepsilon/2),(\varepsilon/2)] \\ 1 \\ \in [-(\varepsilon/2),(\varepsilon/2)] \end{bmatrix} = x_i \pm (\varepsilon/2)||x||_1$$

Χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $a \pm b = [a-b, a+b]$.

Προχωράμε τώρα να κατασκευάσουμε τον πίνακα A. Θα τον κατασκευάσουμε τοποθετώντας κάθετα t πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(t)} \in \{0, \frac{1}{\sqrt{t}}\}^{q \times n}$. Παρατηρείστε ότι αυτή η κατασκευή μοιάζει πολύ με

1. Την κατασκευή του CountMin σκιαγραφήματος. Εκεί πήραμε $q = \Theta(\epsilon^{-1})$ και $t = \Theta(\log n)$.

2. Με τους κώδικες επιδιόρθωσης λαθών που είδαμε στο δεύτερο μάθημα. Εκεί είχαμε πάρει $q = 10, t = n/10$ για να βρούμε $2^{\Theta(n)}$ υποσύνολα του $[n]$ με μικρές ανά δύο τομές.

$$A = \begin{array}{c} \\ q \\ \\ - \\ \\ q \\ \\ - \\ q \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & 0 & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & 0 & . & 0 & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & 0 & . & \frac{1}{\sqrt{t}} & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & . \end{bmatrix}$$

Έχουμε

- $m = qt$
- $||A_i||_2 = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{t}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{t}})^2 + ... + (\frac{1}{\sqrt{t}})^2} = 1$
- $\langle A_i, A_j \rangle = (\text{πλήθος ¨συμφωνιών' των } A_i, A_j) \ / \ t =$
  $= (\text{σε πόσους από τους } t \text{ πίνακες το } i \text{ και το } j \text{ είναι} \neq 0 \text{ στην ίδια γραμμή})/t \leq \varepsilon$

Άμα θέσουμε τις παρακάτω παραμέτρους $\left.\begin{array}{l} q = \Theta(\varepsilon^{-1}) \\ t = \Theta(\varepsilon^{-1} \lg n) \end{array}\right\}$ και διαλέξουμε για κάθε από τους t υποπίνακες και για κάθε από τις n στήλες στην τύχη που θα βρίσκεται (σε ποιο από τις q θέσεις)

το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο, παίρνουμε έναν ε-(μη συνοχικό) με $\Theta(\varepsilon^{-2} \lg n)$ γραμμές. Αλλά είναι δύσκολο να τον βρούμε! Θα κάνουμε κάτι πιο εξεζητημένο χρησιμοποιώντας τους περίφημους κώδικες Reed-Solomon, ή αλλιώς πολυώνυμα χαμηλού βαθμού.

Κώδικες Read-Solomon

Πάρε $q = t$, έστω q πρώτος αριθμός.

Έστω μια αρίθμηση όλων των πολυωνύμων βαθμού d από το $\mathbb{Z}_q$ στο $\mathbb{Z}_q$.

$$g(x) = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i x^i \right) \mod q$$

$g : \{0, 1, ..., q-1\} \to \{0, 1, ..., q-1\}$

πλήθος πολυωνύμων βαθμού $\leq d$ στο $\mathbb{Z}_q = q^{d+1} = n$

Για να κατασκευάσω την πρώτη στήλη του πίνακα A, αποτιμώ το g_1 πάνω σε όλα τα στοιχεία του Z_q, παίρνοντας ένα q-διάστατο διάνυσμα. Εν συνεχεία, αντικαθιστώ κάθε στοιχείο (έστω το $g_1(\ell)$) αυτού του q-διάστατου διανύσματος με ένα q-διάστατο διάνυσμα το οποίο έχει 1 στη θέση $g_1(\ell)$. Έτσι παίρνω ένα διάνυσμα με $q \cdot q = q^2$ στοιχεία. Μπορώ να κάνω το ίδιο για όλα τα $i \in [n]$, αν $n = q^{d+1}$. Προσέξτε ότι δε χρειάζεται να γράψω τον πίνακα κάτω. Μπορώ να υπολογίσω την i-οστή στήλη ή ενα στοιχείο του A αποτιμώντας απλά το g_i πάνω στο Z_q.

$$\begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ \vdots \\ g_1(q-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ \vdots \\ q-6 \\ 37 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε ένα πολυώνυμο. Το που είναι το μη μηδενικό της στοιχείο στο r-οστό πίνακα εξαρτάται από το $g_r(l)$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\langle A_i, A_j \rangle = \frac{\#r : g_i(r) = g_i(r)}{t} \leq \frac{d}{t}$$

Για να πάρουμε έναν ε-(μη συνοχικό πίνακα) θα πρέπει $\frac{d}{t} \leq \varepsilon$. Συνολικά, έχουμε

- $q = t$
- $\varepsilon = \frac{d}{q}$
- $m = q^2$
- $n = q^{d+1}$,

από όπου θέτοντας $q = \Theta(\epsilon^{-1} \frac{\log n}{\log\log + \log(1/\varepsilon)})$ και $d = \Theta(\frac{\log n}{\log q})$, παίρνουμε μία άπειρη ακολουθία ε-(μη συνοχικών) πινάκων με

$$m = \Theta\left(\epsilon^{-2}\left(\frac{\log n}{\log\log n + \log(1/\epsilon)}\right)^2\right).$$

Count Sketch για ℓ_2 ε-βαρέα στοιχεια

Πρόβλημα των ℓ_2 βαρεών στοιχείων : Ένα $i \in [n]$ λέγεται (ℓ_2) ε-βαρέο αν $x_i^2 \geq \varepsilon \cdot ||x||_2^2 = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$

$*$ Για να λύσω το πρόβλημα των ℓ_2 βαρεών στοιχείων να βρω για κάθε $i \in [n]$ ένα x_i' ώστε $x_i' = x_i \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}||x||_2$, ή ισοδύναμα
$|x_i - x_i'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}||x||_2$. Αν έχω βρει ένα τέτοιο x_i' θα λέω ότι ότι το i εκτιμήθηκε σωστά.
Ιδέα: Συνδυάζουμε το CountMin με το AMS. Τοποθετούμε ένα τυχαίο πρόσημο σε κάθε x_i πριν το στείλουμε στο μετρητή.

Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου Count Sketch:

- Χώρος: $O(\epsilon^{-1} \lg n)$ λέξεις
- Χρόνος Ανανέωσης: $O(\lg n)$
- Χρόνος Ερώτησης: $O(n \lg n)$
- Πιθανότητα λάθους: n^{-10}

Το γραμμικό του σκιαγράφημα μοιάζει δηλαδή κάπως έτσι:

$$R = \Theta(\lg n) \quad \begin{matrix} \Theta(\varepsilon^{-1}) \\ \\ \\ - \\ \\ \\ \\ - \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} . & . & . & 0 & \pm 1 & . & \pm 1 & . & . & . \\ . & . & . & \pm 1 & 0 & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ . & . & . & 0 & \pm 1 & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & \pm 1 & . & . & . \\ . & . & . & \pm 1 & 0 & . & 0 & . & . & . \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ . & . & . & 0 & \pm 1 & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & \pm 1 & 0 & . & \pm 1 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & . \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Αν το δούμε σαν $R = \Theta(\log n)$ σειρές από $\Theta(\epsilon^{-1})$ μετρητές, έχουμε το εξής.

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\varepsilon^{-1}} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,\varepsilon^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{R,1} & C_{R,2} & \dots & C_{R,\varepsilon^{-1}} \end{bmatrix}$$

$h_1 : [n] \to [\Theta(\varepsilon^{-1})]$ 2-ανεξάρτητες

$\sigma_r : [n] \to \{-1, +1\}$ 4-ανεξάρτητες

Όταν βλέπω (i, Δ) $\forall r \in [R] : C_{r,h_r(i)} \leftarrow C_{r,h(i)} + \sigma_r(i)\Delta$

Για $r \in [R]$:

$$C_{r,h_r(i)} = \sum_{j:h_r(j)=h_r(i)} \sigma_r(j)x_j \quad \to \quad C_{r,h(i)} \cdot \sigma_r(i) = x_i + \sum_{j\neq i:h_r(j)=h_r(i)} x_i \cdot \sigma_r(j) \cdot \sigma_r(i)$$

Για κάθε $i \in [n]$ θα πάρω μια εκτίμηση για το q_i από την r-οστή επανάληψη, και στη συνέχεια θα πάρω τη διάμεσο των R αυτών εκτιμήσεων. Για να είναι ο εκτιμητής στην r-οστή επανάληψη σωστός με πιθανότητα 9/10 (δηλαδή το σφάλμα της τάξης $\sqrt{\epsilon/2}\|x\|_2$) αρκεί

$$\mathbb{P}\left[|\sum_{j\neq i} \sigma_r(i)\sigma_r(j)x_j|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}||x||_2^2 \right] \leq \frac{1}{10}$$

Υπολογίζω την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του σφάλματος και κάνω Markov.

$$\mathbb{E}|\sum_{j\neq i:h_r(i)=h_r(j)} \sigma_r(i)\sigma_r(j)x_j|^2 = \mathbb{E}\left[\left(\sum \delta_j\eta_j x_j \right)^2 \right] = \sum_{j\neq i} \mathbb{E}\left[\delta_j, \delta_{j'}, \eta_j, \eta_{j'}\right] x_j x_{j'} \overbrace{=}^{why?} \sum_{j\neq i} x_j^2 \Theta(\varepsilon),$$

όπου

$\delta_j = 1$ αν $h_r(j) = h_r(i)$

$\eta_j = \sigma_r(j) \cdot \sigma_r(i)$

Όπως είπαμε, εφόσον έβγαλα την αναμενόμενη τιμή μπορώ να κάνω Markov για να δείξω ότι ¨το λάθος δε θα ξεφύγει πολύ¨.

Ένας δεύτερος περιγραφικός τρόπος να δεις κανείς ότι η εκτίμηση είναι σωστή είναι ο ακόλουθος. Ο μετρητής $i \in [n]$ αναμένει να ¨δεχτεί' $O(\epsilon\|x\|_2^2)$ ℓ_2^2 μάζα από τα υπόλοιπα $j \neq i$, άρα από Markov θα έχει πιθανότητα 9/10 το πολύ $O(\epsilon\|x\|_2^2)$ ℓ_2^2 μάζα (ας την πούμε M για τη συνέχεια) από τα υπόλοιπα $j \neq i$. Δεδομένου ότι αυτό θα συμβεί, ποια η πιθανότητα τα τυχαία πρόσημα να ανεβάσουν πολύ το λάθος, πολύ πάνω από M; Εφόσον αναμένουμε τα τυχαία πρόσημα να μας δώσουν ακριβώς M (όπως στην απόδειξη του AMS), μπορώ πάλι να κάνω Markov για να δείξω ότι το λάθος δε θα ξεφύγει πολύ. Η διαφορά της απόδειξης αυτής από την προηγούμενη είναι ότι πρώτα υπολογίζω τη συνεισφορά από τα h, και μετά από τα σ, ενώ στην άλλη τα κάνω και τα δύο μαζί.

Συνεχίζοντας εκεί που μείναμε, με πιθανότητα 9/10 ο εκτιμητής του x_i στην r-οστή επανάληψη είναι σωστός. Εφόσον επαναλαμβάνουμε $\Theta(\log n)$ φορές, μπορούμε να ρίξουμε σε n^{-101} την πιθανότητα λάθους[1] για ένα i. Άρα η πιθανότητα να υπάρχει ένα i που εκτιμήθηκε λάθος είναι το πολύ $n \cdot n^{-101} = n^{-100}$.

	Χώρος	Χρόνος Ερωτήματος	Χρονος Ανανέωσης	Πιθανότητα Λαθους
Count Sketch	$O(\varepsilon^{-1} \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(\lg n)$	n^{-100}
Count Sketch + Code	$O(\varepsilon^{-1} \lg n \lg \frac{1}{\varepsilon})$	$O(\varepsilon^{-1} \lg n \lg \frac{1}{\epsilon})$	$O(\lg n \cdot \log(1/\epsilon))$	ϵ^{100}

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής εργαλείο για να επιταχύνουμε το CountSketch, στην επόμενη διάλεξη.

Κώδικας του Spielman, 1996:

Υπάρχει μια συνάρτηση από το $\text{enc} : [n] \to \{0,1\}^{20 \lg n}$ για την οποία ισχύει:
Αν έχω το $\text{enc}(x)$ για κάποιο $x \in [n]$ αλλά με το πολύ $\frac{1}{3}(20 \lg n)$ ψηφία του $\text{enc}(x)$ λάθος, μπορώ να βρώ το x σε $O(\lg n)$ χρόνο.

[1] Η σταθερά στον έκθετη έρχεται με ένα πολλαπλασιαστικό κόστος στη σταθερά μέσα στο $\Theta(\log n)$. Για να κάνω την πιθανότητα λάθους n^{-200} πρέπει να διπλασιάσω τη σταθέρα μέσα στο $\Theta(\log n)$, άρα και τον αριθμό των επαναλήψεων.