Υπογραμμικοί Αλγόριθμοι
Μάθημα 10 - 17/12/2019

1 Αραιός Μετασχηματισμός Fourier

Υπενθυμίζουμε τον Διακριτό Μετασχηματισμό Φουριέ ενός διανύσματος μήκους n. Έστω $x \in \mathbb{C} \iff \hat{x} \in \mathbb{C}$ και με $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ έχουμε

$$\hat{x}_f = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \omega^{f \cdot t} \text{ και για τον αντίστροφο } x_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{f=0}^{n-1} \hat{x}_f \omega^{-f \cdot t}$$

Χρησιμοποιούμε αρίθμηση από το 0 για τους δείκτες των διανυσμάτων. Μπορώ να υπολογίσω το $\hat{x}$ σε χρόνο $O(n \log n)$ δοθέντος του x με χρήση FFT.
Ερώτηση : Αν το $\hat{x}$ έχει το πολύ k μη μηδενικές συχνότητες, δηλαδή k μη μηδενικά στοιχεία στο μετασχηματισμό του, μπορώ να υπολογίσω το $\hat{x}$ σε χρόνο $<< n \log n$;
Οι βασικές ποσότητες ενδιαφέροντος είναι ο αριθμός των δειγμάτων που διαβάζω απο το x και ο χρόνος υπολογισμού του $\hat{x}$. Θα δούμε αλγόριθμο που τρέχει σε χρόνο $O(k \log n)$.

Περίπτωση για $k = 1$

Θα έχουμε

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{x}_{i^*} \longleftarrow \text{ παίρνουμε την τιμή}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{x}_{i^*} \omega^{-i^*} \longleftarrow \text{ με } \frac{x_0}{x_1} = \omega^{i^*} \text{ μπορούμε να βρούμε το } i^*$$

Γενικά

Θα λύσουμε το πρόβλημα όταν το n είναι δύναμη του 2. Αυτή η υπόθεση είναι πολύ κρίσιμη για τον αλγόριθμό μας. Παίρνουμε ένα B που διαιρεί το n και φτιάχνουμε ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^B$ το οποίο έχει κάθε (n/B)-οστό στοιχείο του x.

Το διάνυσμα $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{B-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\frac{n}{B}} \\ \vdots \\ x_{\frac{2n}{B}} \\ \vdots \\ x_{\frac{3n}{B}} \\ \vdots \\ x_{\frac{(B-1)n}{B}} \end{bmatrix}$

Δηλαδή $y \in \mathbb{R}^B$ οπου $y_t = x_{t \cdot \frac{n}{B}}$ για $t \in 1\{0, 1, \ldots, B-1\}$ με $B \mid n$. Για τους συντελεστές Φουριέ του δειγματοληπτημένου διανύσματος έχουμε :

$$\hat{y}_f = \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{j=0}^{B-1} y_j e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} jf} = \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{j=0}^{B-1} x_{j\frac{n}{B}} \cdot e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} jf} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{j=0}^{B-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{f'=0}^{n-1} \hat{x}_{f'} \cdot e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{n} f' j \frac{n}{B}} \right) e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} jf} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{B}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{f'=0}^{n-1} \hat{x}_{f'} \sum_{j=0}^{B-1} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} j(f-f')}$$

Το παραπάνω εσωτερικό άθροισμα για $f = f' \mod B$ γίνεται

$$\sum_{j=0}^{B-1} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} j(f-f')} = B$$

ενώ για $f \neq f' \mod B$

$$\sum_{j=0}^{B-1} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{B} j(f-f')} = 0$$

και τελικά έχουμε

$$\hat{y}_f = \sqrt{\frac{B}{n}} \sum_{f'=f \mod B} \hat{x}_{f'}$$

Καταφέραμε να κατακερματίσουμε τους συντελεστές Φουριέ.

$\hat{y}_f = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 + \hat{x}_B + \hat{x}_{2B} + \cdots \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_{B+1} + \hat{x}_{2B+1} + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$

Υπάρχει ένα πρόβλημα όμως: ότι μπορεί να έχουμε μη μηδενικούς συντελεστές σε δύο συχνότητες f, f' με $f = f' \mod B$, και αυτοί οι συντελεστές να κατακερματίζονται μαζί. Χρειαζόμαστε μία επιπρόσθετη ιδέα.

Χρήση ψευδομεταθέσεων

Παίρνουμε σ περιττό $\in \{0,1,..,n-1\}$ και φτιάχνουμε το διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε $z_t = x_{\sigma t \mod n}$. Για τον μετασχηματισμό fourier του έχουμε

$$\hat{z}_f = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} z_t \omega^{ft} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} x_{\sigma t} \omega^{ft} =$$

αναπτύσσουμε το $x_{\sigma t}$ ως προς τους συντελεστές fourier

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \left(\sum_{f'=0}^{n-1} \hat{x}_{f'} \cdot \omega^{-(\sigma t) f'} \right) w^{ft} =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{f'=0}^{n-1} \hat{x}_{f'} \sum_{t=0}^{n-1} \omega^{t(f-\sigma f')}$$

Το παραπάνω εσωτερικό άθροισμα για $f = \sigma f' \mod n$ γίνεται

$$\sum_{t=0}^{n-1} \omega^{t(f-\sigma f')} = n$$

ενώ για $f \neq \sigma f' \mod n$

$$\sum_{t=0}^{n-1} \omega^{t(f-\sigma f')} = 0$$

Επειδή n είναι δύναμη του 2 και σ περιττός ξέρουμε ότι είναι μετάθεση και υπάρχει αντίστροφός σ^{-1} άρα τελικά έχουμε για κάθε συντελεστή $\hat{z}_f$

$$\hat{z}_f = \hat{x}_{\sigma^{-1} f \mod n}$$

Δηλαδή μια μετάθεση στο t ισοδυναμεί με μετάθεση στο f. Κάνοντας πάλι δειγματοληψία όπως πριν για B μπορούμε να κατακερματίσουμε τους συντελεστές του z

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_0 + \hat{z}_B + \hat{z}_{2B} + \cdots \\ \hat{z}_1 + \hat{z}_{B+1} + \hat{z}_{2B+1} + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{(0\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \hat{x}_{(B\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \hat{x}_{(2B\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \cdots \\ \hat{x}_{(1\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \hat{x}_{((B+1)\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \hat{x}_{((2B+1)\cdot\sigma^{-1}) \mod n} + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε το ίδιο πρόβλημα με πριν. Αν $\hat{x}_{k\cdot B+l}$ και $\hat{x}_{k'\cdot B+l}$ μεγάλα όπου πριν θα καθόντουσαν στο ίδιο κουβά τώρα θα είναι στο z τα στοιχεία $\hat{z}_{\sigma k\cdot B+\sigma l \mod n}$ και $\hat{z}_{\sigma k'\cdot B+\sigma l \mod n}$ άρα καταλήγουν πάλι σε ίδιο κουβά.

Ισχύει αφού είναι $(\sigma k \cdot B + \sigma l \mod n) \mod B = (\sigma k' \cdot B + \sigma l \mod n) \mod B$ αφού $B \mid n$.
Η μετάθεση δεν μας βοήθησε να τα διαχωρίσουμε.

Γι αυτό θα χρειαστούμε να αποκόψουμε μία περιοχή συχνοτήτων συνδυαστικά με το παραπάνω τέχνασμα. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι για τυχαίο περιττό $\sigma \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left[\left| \left(\sigma f \mod n - \sigma f' \mod n \right) \mod n \right|_o \leq B \right] \leq \frac{2B}{n}.$$

Με $\|\cdot\|_o$ συμβολίζουμε την απόσταση ενός σημείου στο Z_n από το 0, δηλαδή $\|x\|_0 = \min\{x, n-x\}$. Με άλλα λόγια, δύο συχνότητες κάτω από τη ψευδομετάθεση θα είναι B κοντά η μία στην άλλη με πιθανότητα ανάλογη του B/n.

Παρατήρηση: Αν ψευδομεταθέσω, 9/10 των συχνοτητών των μη μηδενικών συντελεστών θα είναι μόνες τους σε μία λωρίδα μήκους $\approx \frac{n}{k}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω διάνυσμα/ φίλτρο για να τα βρούμε.

Αραιό ζωνοπερατό φίλτρο

Υπάρχει διάνυσμα $G \in \mathbb{C}^n$

(i) $\|G\|_0 \leq O(k \log n)$.

(ii) Το $\hat{G}$ είναι 1 στο διάστημα $[-\frac{n}{k}, \frac{n}{k}]$[1], το πολύ 1 στο σύνολο $[-\frac{n}{k} - \frac{n}{10000k}, -\frac{n}{k}] \cup [\frac{n}{k}, \frac{n}{k} + \frac{n}{10000k}]$, και $1/\text{poly}(n)$ οπουδήποτε αλλού.

Γνωρίζω ότι $\hat{x} * \hat{G}$ είναι ο μετασχηματισμό Φουριέ του x πολλαπλασιασμένο κατά στοιχείο με το G, δηλαδή $\hat{x} * \hat{G} x \hat{\odot} G$. Το $\hat{x} * G$ αντιστοιχεί στην απομόνωση του $\hat{x}$ σε προσεγγιστικά παράθυρα μήκους n/k.

Χρησιμοποιώ το φίλτρο συνελίσσοντας με το διάνυσμα μετά την μετάθεση για να συλλέξω τις τιμές των συντελεστών του $\hat{x}$. Κάνω 2 φορές την ίδια διαδικασία με μεταθέση σ για να μπορώ να βρώ και τις ίδιες τις συχνότητες (δηλαδή το δείκτη των συντελεστών αν χρησιμοποιήσουμε ορολογία διανυσμάτων).

Μια για $i \Rightarrow \sigma i \mod n$

$$\hat{z}_f = \hat{x}_{(\sigma^{-1} f \mod n)}$$

και μια $i \Rightarrow \sigma(i + \alpha) \mod n$

$$\hat{z}_f = \hat{x}_{(\sigma^{-1} f \mod n)} \omega^{-f \alpha \sigma^{-1}}$$

Τελικά έχουμε τα παρακάτω βήματα :

(i) Απο το διάνυσμα x παίρνουμε το $x^{'}$ οπου $x_i^{'} = x_{\sigma i \mod n}$ (αντίστοιχα $x_i^{'} = x_{\sigma(i+\alpha) \mod n}$).

(ii) Έπειτα φτιάχνουμε το διάνυσμα $z = x^{'} \odot G$. Τα βήματα (1) και (2) μπορούν να γίνουν σε $O(k \log n)$ χρόνο μαζί (πώς·).

[1] Εδώ δουλεύω τους δείκτες $\mod n$, άρα πχ το $-\frac{n}{k}$ αντιστοιχεί στο $n - \frac{n}{k}$

(iii) Για $B = \Theta(k)$, αθροίζουμε κάθε (n/B)-οστό στοιχείο του z για να πάρουμε το διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^B$. Δηλαδή, $w_i = \sum_{t \in [n]: t \mod B = i} z_t$ για $i \in [B]$.

(iv) Παίρνουμε το $\hat{w}$ χρησιμοποιώντας k-διάστατο FFT.

Δηλαδή από το $z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$

Παίρνουμε το

$$w = \begin{bmatrix} z_0 + z_{\frac{n}{B}} + z_{2\frac{n}{B}B} + \cdots \\ z_1 + z_{\frac{n}{B}+1} + z_{2\frac{n}{B}+1} + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ο συνολικός χρόνος που δαπανήσαμε είναι $O(k \log n)$. Διαίσθηση: Η παραπάνω διαδικασία αντιστοιχεί σε $\Theta(k)$ ισαπέχοντα ολισθημένα (στον κύκλο) προσεγγιστικά παράθυρα μήκους $\frac{n}{k}$. Από την ιδιότητα των ψευδομεταθέσεων και μερικά τυπικά πιθανοτικά επιχειρήματα, τα $9/10$ των μη μηδενικών στοιχείων θα είναι μόνα τους στο παράθυρό τους, και έτσι θα μπορέσουμε να τα αναγνωρίσουμε χρησιμοποιώντας τις δύο μετρήσεις (για $a = 0$ και $a\ neq 0$).

Πάλι παίρνουμε τα $9/10$ των μη μηδενικών στοιχείων συν κάποια ενδεχομένως λανθασμένα, και εν συνεχεία μπορούμε να προχωρήσουμε με ανάλογο τρόπο όπως στην άσκηση 4 της δεύτερης σειράς ασκήσεων για να διορθώσουμε τα λάθη.