

Διαγώνισμα στους Υπογραμμικούς Αλγόριθμους: Φοιτητής Ε

7 Μαρτίου 2020

Στο μάθημα είδαμε ότι χρησιμοποιώντας $O(\log n)$ γραμμικές μετρήσεις σε ένα διάνυσμα $x \in R^n$, μπορείς να βρεις ένα i^* ώστε $|x_{i^*}| \geq c \cdot \sqrt{\sum_{i \in [n] \setminus \{i^*\}} x_i^2}$. Σε αυτό το διαγώνισμα θα δούμε ότι μπορείς να επιτύχεις το ίδιο χρησιμοποιώντας $O(\log \log n)$ γραμμικές μετρήσεις, αν επιτρέπεται να σχεδιάσεις τις γραμμές του σκιαγραφήματός σου προσαρμοστικά: μπορείς να σχεδιάσεις τη δεύτερη γραμμή $a_{2,1}, a_{2,2}, \dots$, αφού μάθεις το αποτέλεσμα της πρώτης μέτρησης, ήτοι το $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n$.

α) Έστω ότι είμαστε στην περίπτωση $|x_{i^*}| \geq \frac{n}{\sqrt{\delta}} C \sqrt{\sum_{i \in [n] \setminus \{i^*\}} x_i^2}$, όπου C σταθερά και δ παράμετρος. Θα δούμε ότι με δύο μετρήσεις μπορείς να βρεις το i^* με πιθανότητα $1 - \delta$. Παίρνουμε τυχαία πρόσημα σ_i και ορίζουμε

$$a = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i, b = \sum_{i=1}^n (i + n) \sigma_i x_i.$$

Δείξτε ότι μπορούμε να επιτύχουμε το ζητούμενο κοιτώντας τον πλησιέστερο ακέραιο στο $b/a - n$.

β) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει i^* ώστε $|x_{i^*}| \geq C \frac{B^2}{\delta^2} \sqrt{\sum_{i \in [n] \setminus \{i^*\}} x_i^2}$ για κάποια σταθερά C και παραμέτρους B, δ . Θα βρούμε με πιθανότητα $1 - \delta$ ένα σύνολο $S \subseteq [n]$ το οποίο ικανοποιεί

- $i^* \in S$,
- $\sqrt{\sum_{i \in S \setminus \{i^*\}} x_i^2} \leq B^{-1} \cdot \sqrt{\sum_{i \in [n] \setminus \{i^*\}} x_i^2}$
- $|S| \leq 1 + n/B^2$

Έστω $\Delta = B^2/\delta$ και συνάρτηση κατακερματισμού $h : [n] \rightarrow [\Delta]$. Έστω το διάνυσμα $z \in R^\Delta$ με $z_j = \sum_{i: h(i)=j} \sigma_i x_i$, όπου σ_i τυχαία πρόσημα. Δείξτε ότι

¹Το c είναι κάποια κατάλληλη σταθερά την οποία δε θα προσδιορίσουμε ακριβώς.

τρέχοντας τον αλγόριθμο της άσκησης 1 στο z μπορούμε να πετύχουμε το ζητούμενο.

γ) Για να ολοκληρωθεί το ζητούμενο του διαγωνίσματος, χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο του προηγούμενου ερώτηματος με την ακολουθία παραμέτρων $B_0 = 2, B_i = B_{i-1}^{3/2}$ για $i \geq 1$, και $\delta_i = 2^{-i}/4$.