

# Τελικό Διαγώνισμα τους Υπογραμμαμικούς Αλγόριθμους: Φοιτητής Δ

7 Μαρτίου 2020

Θα σχεδιάσουμε μια δομή δεδομένων μικρού χώρου (αλγόριθμο ροής) η οποία έμμεσα κρατάει ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$  με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Χρησιμοποιεί χώρο  $O(\log n \cdot \log^2(1/\delta))$ .
- Έχει μια ρουτίνα ανανέωσης: για κάθε ανανέωση  $(i, \Delta)$ , η οποία προκαλεί  $x_i \leftarrow x_i + \Delta$ , ανανεώνει ένα γραμμικό σκιαγράφημα.
- Όταν επιδέχεται ερώτηση, επιστρέφει με πιθανότητα  $1 - \delta$  έναν δείκτη  $i$  για τον οποίο  $x_i \neq 0$ . Η πιθανότητα να επιστρέψει ένα συγκεκριμένο  $i$  είναι  $\frac{1}{\|x\|_0} \pm \delta$ . Αν τέτοιος δείκτης δεν υπάρχει, επιστρέφει πάντα "Παρακαλώ, σοβαρευτείτε".

Μία τέτοια δομή λέγεται  $\ell_0$  δειγματολήπτης.

α) Αν το  $x$  είναι 1-αραιό, μπορείτε να το βρείτε με 2 γραμμικές μετρήσεις, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 4 της δεύτερης σειράς ασκήσεων. Δείξτε ότι αν δεν είναι 1-αραιό μπορείτε να το κατέλαβετε με πιθανότητα  $1 - \delta$  και χώρο  $O(\log(1/\delta))$  χρησιμοποιώντας το AMS σκιαγράφημα.

β) Θα κρατήσουμε παράλληλα  $\log n$  διαφορετικές δομές δεδομένων της μορφής του ερωτήματος α). Έστω μία συνάρτηση κατακερματισμού  $h : [n] \rightarrow \{1, 2, \dots, \log n\}$ , η οποία απεικονίζει στοιχεία  $i \in [n]$  σε καθεμία από τις δομές έτσι ώστε  $P[h(i) = j] \sim \frac{1}{2^{j+1}}$ . Όταν έρχεται μία ανανέωση  $(i, \Delta)$  θα την αναθέτουμε στη  $h(i)$ -οστή δομή. Δείξτε ότι με σταθερή πιθανότητα υπάρχει ένα  $j^* \in \{1, 2, \dots, \log n\}$  για το οποίο η  $j^*$ -οστή δομή θα είναι υπεύθυνη για ακριβώς 1 στοιχείο  $x_i$  με  $x_i \neq 0$ .

γ) Χρησιμοποιώντας τα α) και β) δείξτε ότι μπορούμε, χρησιμοποιώντας  $\Theta(\log n \cdot \log^2(1/\delta))$  μετρητές να επιτύχουμε το ζητούμενο <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Επίσης για λόγους ευκολίας, δε θα ασχοληθούμε με το πόσο ανεξάρτητη μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση κατακερματισμού.

<sup>2</sup>Το μόνο που δεν διευκρινίσαμε είναι πως θα γράψουμε σε μικρό χώρο τη συνάρτηση  $h$ , αλλά είναι πολύπλοκο για διαγώνισμα και το αφήνουμε εκτός.