

# Τελικό Διαγώνισμα στους Υπογραμμαμικούς Αλγόριθμους: Φοιτητής Α

7 Μαρτίου 2020

Στην τάξη είδαμε έναν αλγόριθμο υπογραμμαμικού χρόνου που υπολογίζει τον αραιό μετασχηματισμό ενός διανύσματος  $x \in C^n$  όταν αυτός έχει το πολύ  $k$  μη μηδενικά στοιχεία, ή ισοδύναμα ανακατασκευάζει ένα  $k$ -αραιό διάνυσμα όταν έχουμε πρόσβαση μέσω μαντείου στον μετασχηματισμό Φουριέ του.

Σε αυτό το διαγώνισμα θα δούμε έναν αλγόριθμο υπογραμμαμικού χρόνου για την περίπτωση  $k = 1$  χωρίς την υπόθεση ότι το  $\hat{x}$  είναι αραιό. Για την ακρίβεια, έστω ότι υπάρχει ένα  $f^*$  ώστε

$$|\hat{x}_{f^*}| \geq C \cdot \sum_{f \in [n] \setminus \{f^*\}} |\hat{x}_f|,$$

όπου  $C$  μια επαρκώς μεγάλη σταθερά.

Θα υποθέσουμε η αρίθμηση των διανυσμάτων ξεκινάει από 0, και  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Επίσης, αν αυτό σας διευκολύνει κάπου μπορείτε να υποθέσετε ότι το  $n$  είναι είτε πρώτος είτε δύναμη του 2.

α) Δείξτε πως από το  $x_a/x_0$  μπορούμε να βρούμε έναν κυκλικό τομέα του  $Z_n$  μήκους  $n/100$  ο οποίος περιέχει το  $f^*$ .

β) Δείξτε ότι χρησιμοποιώντας  $O(\log n)$  τυχαία  $a, r$  μπορούμε σε χρόνο  $O(n \log n)$  με  $O(\log n)$  δείγματα να βρούμε το  $f^*$ .

γ) Δείξτε ότι χρησιμοποιώντας  $O(\log n)$  χρόνο και δείγματα μπορούμε να βρούμε το  $f^*$ . Η ιδέα είναι να αξιοποιήσουμε την τυχαιότητα των  $a$  για κάνουμε δυαδική αναζήτηση στο  $Z_n$  (ή ισοδύναμα στον μιγαδικό κύκλο) για το  $f^*$ , ‘κόβοντας’ στα δύο κάθε φορά την περιοχή (τόξο) στην οποία δύναται αυτό να κείται. Για την ακρίβεια, στο  $i$ -οστό βήμα έχουμε έναν πιθανό κυκλικό τομέα  $T_i \subseteq Z_n$  μήκους  $O(n/2^i)$  ώστε  $f \in T_i$ . Επιπρόσθετα, έχουμε έναν κυκλικό τόξο μήκους  $n/100$  το οποίο περιέχει το  $a_i \cdot f^*$ , όπου  $a_i$  είναι το  $i$ -οστό  $a$ . Σπάμε το  $T_i$  σε ένα σταθερό πλήθος (ας πούμε 50) τομέων και κάνουμε το εξής: για κάθε από αυτούς τους τομείς παίρνουμε έναν αντιπρόσωπο και κοιτάμε αν ο αντιπρόσωπος είναι μέσα στο κυκλικό τόξο.