

# Τελικό Διαγώνισμα στους Υπογραμμαμικούς Αλγόριθμους: Φοιτητής Γ

7 Μαρτίου 2020

Στην τάξη είδαμε τον διακριτό μετασχηματισμό Φουριέ ενός διανύσματος  $x \in C^n$ , ο οποίος είναι ένα διάνυσμα  $\hat{x} \in C^n$  το οποίο ορίζεται ως

$$\hat{x}_f = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} \omega^{ft} x_t, \forall f \in [0, N-1].$$

Είδαμε έναν αλγόριθμο υπογραμμαμικού χρόνου όταν το  $\hat{x}$  είναι ακριβώς  $k$ -αραιό. Σήμερα θα δούμε έναν αλγόριθμο που χρησιμοποιεί υπογραμμαμικό πλήθος δειγμάτων, αλλά μπορεί να προσεγγίσει το  $\hat{x}$  όταν αυτό είναι ‘περίπου’  $k$ -αραιό. Ορίζουμε  $\hat{x}_{[k]}$  ως το διάνυσμα που προκύπτει αν μηδενίσουμε τις μικρότερες σε μέτρο  $n-k$  συντεταγμένες του  $\hat{x}$ <sup>1</sup>, και  $\hat{x}_{-k} = \hat{x} - \hat{x}_{[k]}$ , το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως θόρυβο. Για ευκολία ας υποθέσουμε ότι  $\|\hat{x}_{[k]}\|_2 \geq 100 \cdot \|\hat{x}_{-k}\|_2 \neq 0$ .

Σε ό,τι ακολουθεί μπορείτε να υποθέσετε ότι το  $n$  είναι πρώτος, αν αυτός σας διευκολύνει κάπου.

α) Παίρνουμε  $t_1, t_2, \dots, t_B$  τυχαίους αριθμούς στο  $[0, N-1]$ , όπου  $B = \Theta(k)$ . Υπολογίζουμε το διάνυσμα  $\hat{z} \in C^n$  ως

$$\hat{z}_f = \frac{\sqrt{n}}{B} \sum_{j=1}^B x_{t_j} \cdot \omega^{ft_j}.$$

Δείξτε ότι με πιθανότητα  $2/3$  έχουμε ότι

$$\|\hat{z}_f - \hat{x}_f\| \leq \frac{1}{10\sqrt{k}} \|\hat{x}\|_2.$$

β) Χρησιμοποιώντας  $O(k \log n)$  δείγματα δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε με καλή πιθανότητα ένα διάνυσμα  $\hat{z} \in C^n$  το οποίο ικανοποιεί<sup>2</sup>

$$\|\hat{z} - \hat{x}\|_\infty \leq \frac{1}{10\sqrt{k}} \|\hat{x}\|_2.$$

<sup>1</sup>Επιλύουμε τυχόν ισοπαλίες αυθαίρετα.

<sup>2</sup>Αυτό μπορεί να σας θυμίσει το πρόβλημα των βαρέων στοιχείων και το COUNTSKETCH σκιαγράφημα. Όντως, αντί των τυχαίων προσήμων χρησιμοποιούμε τις ρίζες της μονάδας για να πετύχουμε παρόμοιο αποτέλεσμα. Οι στροφές στο μιγαδικό κύκλο δημιουργούν όλη τη μαγεία!

Στα παρακάτω ερωτήματα υποθέστε ότι σας δίνουμε τη τιμή  $\|\hat{x}_{-k}\|_2$  ακριβώς και έναν αριθμό  $R^* \geq \|\hat{x}\|_\infty / \|\hat{x}_{-k}\|_2$ .

γ) Θέτοντας  $\hat{z}_f \rightarrow 0$  αν  $|\hat{z}_f| \leq (R^*/20) \cdot \|\hat{x}_{-k}\|_2$  (αλλιώς το αφήνετε ίδιο), εξηγήστε γιατί στο διάνυσμα  $\hat{x} - \hat{z}$  έχουμε μειώσει (ή τουλάχιστον δεν έχουμε μεγαλώσει) την  $\|\cdot\|_\infty$  νόρμα σε σύγκριση με το  $\hat{x}$ .

δ) Εξηγήστε πως μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο  $O(n \log^2 n)$  ένα διάνυσμα  $\hat{w}$  για το οποίο

$$\|\hat{x} - \hat{z} - \hat{w}\|_\infty \leq \frac{1}{10\sqrt{k}} \|\hat{x} - \hat{z}\|_2.$$

Αν και δεν το έχουμε δει στο μάθημα, μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Φουριέ τρέχει σε χρόνο  $O(n \log n)$  ανεξάρτητα του  $n$  (στο μάθημα το είδαμε μόνο για δυνάμεις του 2).

ε) (Προαιρετικό) Στην παραπάνω λογική, δείξτε ότι με  $O(k \log n \log R^*)$  δείγματα<sup>3</sup> και σε χρόνο  $O(n \log^2 n \log R^*)$  μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $y \in C^n$  έτσι ώστε

$$\|\hat{y} - \hat{x}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \|\hat{x}_{-k}\|_2.$$

---

<sup>3</sup>Μπορούμε να δείξουμε ότι δε χρειάζεται να πληρώσουμε το  $\log R^*$  (το οποίο μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο) στο πλήθος των δειγμάτων, ακόμα και στην αρκετά πιο δύσκολη κατάσταση του πολυδιάστατου αραιού μετασχηματισμού Φουριέ. Μπορούμε να επαναχρησιμοποιήσουμε τα δείγματα κατά μήκος των  $O(\log R^*)$  διαφορετικών επαναλήψεων! Βλέπε Nakos, Song, Wang FOCS 2019.