

# Τελικό Διαγώνισμα στους Υπογραμμαμικούς Αλγόριθμους: Φοιτητής Β

7 Μαρτίου 2020

Θα δούμε ένα νέο σχήμα δειγμάτων για τον έλεγχο σύφιλης, τον οποίο είδαμε στην τελευταία σειρά ασκήσεων. Έστω ότι είμαστε ικανοποιημένοι αν βρούμε μια λίστα  $L$  μεγέθους  $O(k)$  η οποία περιέχει όλους τους μολυσμένους στρατιώτες. Θα δείξουμε ότι αυτό γίνεται με  $O(k \log(n/k))$  δείγματα, σε σχέση με αυτό που είδαμε στη σειρά ασκήσεων το οποίο απαιτεί τετραγωνικό πλήθος δειγμάτων! Θα ονομάσουμε ένα τέτοιο  $k$ -σχήμα ασθενές. Έστω  $S_1, S_2, \dots, S_m$  τα σύνολα δειγμάτων τα οποία αποτελούν το σχήμα.

α) Δείξτε ότι αν τα σύνολα  $S$  ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\forall X, Y \subseteq [n], |X| = |Y| = k, X \cap Y = \emptyset : \exists j \in [m], S_j \cap X = \emptyset, S_j \cap Y \neq \emptyset,$$

τότε μπορούμε να επίλυσουμε το ζητούμενο πρόβλημα με τον ίδιο αλγόριθμο με αυτόν που είδαμε στην Άσκηση 3.

β) Έστω το γραμμικό σκιαγράφημα  $\Phi$  που αντιστοιχεί στο COUNTMIN με  $O(\log(n/k))$  επαναλήψεις και  $O(k)$  μετρητές, όπου χρησιμοποιούμε ανά  $\Theta(k)$ -ανεξάρτητες συναρτήσεις κατακερματισμού αντί για ανά δύο. Δείξτε ότι αν πάρουμε τα  $S_j$  ως τα σύνολα που αντιστοιχούν στις γραμμές του  $\Phi$  (βάζουμε το  $c$  στο  $S_j$  αν  $F_{j,c} = 1$ ) τότε έχουμε ένα  $k$ -ασθενές σχήμα. Εξηγήστε γιατί ο χρόνος να βρούμε την λίστα  $L$  είναι  $O(n \log(n/k))$ .

Στα παρακάτω ερωτήματα θα δείξουμε πως να επιταχύνουμε την εύρεση της λίστας  $L$ .

γ) Υποθέστε ότι ο  $n$  είναι τέλει τετράγωνο σε αυτό και το επόμενο ερώτημα. Θεωρήστε τον 'υπερ-στρατιώτη'  $i$ , για  $i \in \{0, 1\}^{(1/2) \log n}$  ο οποίος αντιστοιχεί σε όλους τους στρατιώτες των οποίων τα  $(1/2) \log n$  μεγαλύτερα δυφία της δυαδικής τους αναπαράστασης σχηματίζουν τον αριθμό  $i$ . Δείξτε πως να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του β) για να βρούμε τους υπερ-στρατιώτες που είναι μολυσμένοι. Ένας υπερ-στρατιώτης είναι μολυσμένος αν και μόνο αν κάποιος από τους στρατιώτες στους οποίους αντιστοιχεί είναι μολυσμένος.

δ) Θεωρώντας ‘υπερ-στρατιώτες’ και ‘υπο-στρατιώτες’, οι οποίοι καθορίζονται αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τα  $(1/2) \log n$  χαμηλότερα δυφία, δείξτε ότι μπορούμε να βρούμε τη λίστα  $L$  με  $O(k \log n)$  δείγματα σε χρόνο  $O(k^2 \log n + \sqrt{n} \log n)$ .

ε) Χρησιμοποιώντας αναδρομή, δώστε έναν σχήμα  $O(k \log n \cdot \log \log_k n)$  δειγμάτων που επιτρέπει την εύρεση της λίστας  $L$  σε χρόνο  $O(k^2 \cdot \text{poly}(\log n))$ . Δε μπορείτε να υποθέσετε ότι το  $n$  είναι κάποιας συγκεκριμένης μορφής, χωρίς να δικαιολογήσετε το συλλογισμό σας.