Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Θεωρητική Πληροφορική Ι - Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα ΙΙ
1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Η παράδοση της εργασίας:
-είναι απαραίτητη προϋπόθεση για προβιβάσιμο βαθμό στο μάθημα.
-γίνεται ηλεκτρονικά στο *moodle* του μαθήματος (παράδοση με e-mail δεν θα γίνει αποδεκτή)
-πρέπει να γίνει μέχρι την 1/12/2014.

Είναι αποδεκτό (και σε ορισμένες ασκήσεις απαραίτητο) να αναζητήσετε την βιβλιογραφία, είναι όμως απαραίτητο να παραθέσετε αναφορές για οτιδήποτε χρησιμοποιήσετε.
Η μη αναφορά των πηγών συνιστά *λογοκλοπή*, πρακτική ακαδημαϊκά ανεπίτρεπτη με συνέπειες στην βαθμολόγηση της εργασίας.

Άσκηση 1

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$$

όπου το k δεν είναι σταθερό, π.χ. $f(1,3,5,7) = 7$, $f(3,6,3,6,6,4,6) = 6$ κλπ.

Άσκηση 2

Ορίζουμε μια δισδιάστατη Μηχανή Turing ως μία ΜΤ που η κάθε ταινία της είναι ένα άπειρο διακριτό επίπεδο (grid), δηλαδή η ΜΤ μπορεί εκτός από δεξιά-αριστερά να κινείται και πάνω-κάτω. Δείξτε ότι για κάθε (Time-Constructible) συνάρτηση $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, αν η L αποφασίζεται από μία δισδιάστατη TM σε χρόνο $T(n)$, τότε $L \in \mathbf{DTIME}[T^2(n)]$.

Άσκηση 3

α΄. Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$.
Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

β΄. Δείξτε ότι η κλάση $\mathbf{NP}$ είναι κλειστή ως προς τις logspace και τις Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο και για την κλάση $\mathbf{DTIME}[n^2]$;

Άσκηση 4

α΄. Έστω $L_1,\ L_2 \in \mathbf{NP}$. Δείξτε ότι η κλάση $\mathbf{NP}$ είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$. Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα $L_1 \cap L_2$;

β΄. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \geq 0 \ \& \ x_1, x_2 \ldots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση $\mathbf{NP}$ είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

Άσκηση 5

Ο S. Cook, όρισε μια διαφορετική αναγωγή από αυτές που χρησιμοποιούμε για τα **NP**-complete προβλήματα (αναγωγές κατά Karp, συμβ. $\leq_m^p$):
Μια γλώσσα L ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο κατά Cook (Cook reducible) σε μία γλώσσα L' (συμβ. $L \leq_T^P L'$) αν υπάρχει μία TM πολυωνυμικού-χρόνου που να αποφασίζει την L, η οποία έχει μία έξτρα (μαγική!) ταινία, τέτοια ώστε όποτε γραφεί ένα string x στην ταινία, μπορεί να μπει σε μια ειδική κατάσταση "ερώτησης ", και τότε σε *μόνο ένα* υπολογιστικό βήμα να έχει την απάντηση για το αν $x \in L'$ ή όχι (θα δούμε ότι αυτό λέγεται "μαντείο" (oracle) για την L').

α'. Δείξτε ότι η Αναγωγή κατά Cook είναι μεταβατική σχέση, δηλαδή: $L_1 \leq_T^P L_2 \wedge L_2 \leq_T^P L_3 \Rightarrow L_1 \leq_T^P L_3$.

β'. Δείτε ότι $L \leq_m^p L' \Rightarrow L \leq_T^P L'$.

γ'. Δείξτε ότι αν η **NP** είναι κλειστή ως προς την αναγωγή κατά Cook , τότε $\mathbf{NP} = co\mathbf{NP}$.

Άσκηση 6

Έστω ότι παραλλάσσουμε την logspace αναγωγή σε μία αντίστοιχη που μπορεί να χρησιμοποιεί πολυωνυμικό χώρο, αντί για λογαριθμικό.
Δείξτε ότι με αυτή την αναγωγή, κάθε μη-τετριμμένη γλώσσα (δηλαδή $L \neq \emptyset, \Sigma^*$) $L \in \mathbf{PSPACE}$ είναι **PSPACE**-complete.

Άσκηση 7

1. Δείξτε ότι ο ορισμός με πιστοποιητικά της κλάσης **NL** (Ορισμός 4.19 από το βιβλίο των Arora-Barak [2]) είναι ισοδύναμος με τον αρχικό ορισμό της **NL** ($\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}[\log n]$).

2. Δείξτε ότι αν στον ορισμό με πιστοποιητικά της **NL** επιτρέψουμε στην read-once κεφαλή να κινείται και στις δύο κατευθύνσεις, τότε η κλάση που ορίζεται είναι ακριβώς η **NP**.

Άσκηση 8

Μία πολύ βασική τεχνική στην Θεωρία Πολυπλοκότητας είναι η paddability, με την οποία "παραφουσκώνουμε" κάθε string μιας γλώσσας με κάποια περιττά επιπλέον σύμβολα:

Ορισμός 1 *Μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ λέγεται paddable αν υπάρχει μία πολυωνυμικά υπολογίσιμη και αντιστρέψιμη συνάρτηση $pad : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ (δηλαδή pad, $pad^{-1} \in \mathbf{FP}$), τέτοια ώστε:*

i. $pad(x, y) \in L$ *αν και μόνο αν* $x \in L$, *για κάθε* $x, y \in \Sigma^*$.

ii. $|pad(x, y)| > |x| + |y|$, *για κάθε* $x, y \in \Sigma^*$.

iii. Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, που δεδομένου του $pad(x, y)$ *επιστρέφει το* y.

Χρησιμοποιώντας την paddability μπορούμε να δείξουμε ισομορφισμούς πολυωνυμικού χρόνου μεταξύ $\mathbf{NP} - complete$ προβλημάτων, όπως θα δούμε στο μάθημα, όπως και να δείχνουμε ότι σχέσεις μεταξύ κλάσεων πολυπλοκότητας μεταφέρονται σε διαφορετικές τάξεις μεγέθους (scale-up/down).

α'. Δείξτε ότι τα προβλήματα `KNAPSACK` και `MAX CUT` είναι paddable γλώσσες.

β'. Δείξτε ότι αν $\mathbf{EXP} \neq \mathbf{PSPACE}$, τότε $\mathbf{P} \neq \mathbf{L}$.