Μάθημα Έβδομο

Άρης Παγουρτζής, Βασίλης Νάκος ΑΛΜΑ

Προηγούμενο Μάθημα

$(Min, +)$ συνέλιξη και ισοδυναμία με πρόβλημα Σακιδίου.

Προηγούμενο Μάθημα

$(Min, +)$ συνέλιξη και ισοδυναμία με πρόβλημα Σακιδίου.

Σε αυτό το μάθημα: Πολλαπλασιασμός πινάκων Boole και επιπτώσεις.

Δίνονται δύο $n \times n$ πίνακες A, B με εγγραφές στο $\{0, 1\}$, τις οποίες τις αντιστοιχούμε στο true,false. Να υπολογιστεί ο πίνακας $C \in \{0, 1\}^{n \times n}$ ώστε

$$C[i][j] = \bigvee_{k=1}^{n} A[i] \wedge B[j].$$

Εναλλακτικά,

$$C[i][j] = \sum_{k=1}^{n} A[i] \cdot B[j],$$

όπου $+$ είναι το λογικό Ή και $\cdot$ το λογικό ΚΑΙ.

Μερικά γεγονότα

- Το πρόβλημα Πολλαπλασιασμού Πινάκων Boole (BMM) είναι ισοδύναμος με το πρόβλημα του υπολογισμού **Μεταβατικού Κλεισίματος** ενός δεδομένου γράφου.

Μερικά γεγονότα

- Το πρόβλημα Πολλαπλασιασμού Πινάκων Boole (BMM) είναι ισοδύναμος με το πρόβλημα του υπολογισμού **Μεταβατικού Κλεισίματος** ενός δεδομένου γράφου.

- Το BMM μπορεί να αναχθεί σε υποκυβικό χρόνο στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών.

Μερικά γεγονότα

- Το πρόβλημα Πολλαπλασιασμού Πινάκων Boole (BMM) είναι ισοδύναμος με το πρόβλημα του υπολογισμού **Μεταβατικού Κλεισίματος** ενός δεδομένου γράφου.

- Το BMM μπορεί να αναχθεί σε υποκυβικό χρόνο στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών.
- Καλά όλα αυτά, αλλά δεν είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος πολλαπλασιασμού πινάκων, το οποίο λύνεται σε n^{ω} χρόνο, για $\omega < 3$;

Μερικά γεγονότα

- Το πρόβλημα Πολλαπλασιασμού Πινάκων Boole (BMM) είναι ισοδύναμος με το πρόβλημα του υπολογισμού **Μεταβατικού Κλεισίματος** ενός δεδομένου γράφου.

- Το BMM μπορεί να αναχθεί σε υποκυβικό χρόνο στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών.

- Καλά όλα αυτά, αλλά δεν είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος πολλαπλασιασμού πινάκων, το οποίο λύνεται σε n^{ω} χρόνο, για $\omega < 3$;

  Υπολογίζουμε το $\widetilde{C}[i][j] = \sum_{k=1}^{n} A[i] \cdot B[j]$ όπου $+, \cdot$ έχουν τη συνηθισμένη σημασιολογία, και έχουμε $\widetilde{C}[i][j] > 0 \leftrightarrow C[i][j] = 1$.

Μερικές αναλογίες

Το $(Min, +)$ γινόμενο αντιστοιχούσε στην εύρεση συντομότερων μονοπατιών μήκους 2 από κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

Μερικές αναλογίες

Το $(Min, +)$ γινόμενο αντιστοιχούσε στην εύρεση συντομότερων μονοπατιών μήκους 2 από κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

$(Min, +)$ γινόμενο $\iff$ APSP

Μερικές αναλογίες

Το $(Min, +)$ γινόμενο αντιστοιχούσε στην εύρεση συντομότερων μονοπατιών μήκους 2 από κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

$(Min, +)$ γινόμενο $\iff$ APSP

Το BMM αντιστοιχεί στην εύρεση αν υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 σε ένα γράφο G από το u στο v, για κάθε u, v.

Μερικές αναλογίες

Το $(Min, +)$ γινόμενο αντιστοιχούσε στην εύρεση συντομότερων μονοπατιών μήκους 2 από κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

$(Min, +)$ γινόμενο $\iff$ APSP

Το BMM αντιστοιχεί στην εύρεση αν υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 σε ένα γράφο G από το u στο v, για κάθε u, v.

BMM $\iff$ Μεταβατικό Κλείσιμο

Μερικές αναλογίες

Το $(Min, +)$ γινόμενο αντιστοιχούσε στην εύρεση συντομότερων μονοπατιών μήκους 2 από κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη.

$(Min, +)$ γινόμενο $\iff$ APSP

Το BMM αντιστοιχεί στην εύρεση αν υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 σε ένα γράφο G από το u στο v, για κάθε u, v.

BMM $\iff$ Μεταβατικό Κλείσιμο

Αλγόριθμος Strassen

Λογικός δρόμος: διαίρει και βασίλευε. Σπάμε τον A σε 4 πίνακες $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ με τον κλασικό τρόπο: ο πίνακας $A_{i,j}$ είνα ο A περιορισμένος στις γραμμές $[i \cdot \frac{n}{2} + 1, (i+1) \cdot \frac{n}{2}]$ και στις στήλες $[j \cdot \frac{n}{2} + 1, (j+1) \cdot \frac{n}{2}]$.

Αλγόριθμος Strassen

Λογικός δρόμος: διαίρει και βασίλευε. Σπάμε τον A σε 4 πίνακες $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ με τον κλασικό τρόπο: ο πίνακας $A_{i,j}$ είνα ο A περιορισμένος στις γραμμές $[i \cdot \frac{n}{2} + 1, (i+1) \cdot \frac{n}{2}]$ και στις στήλες $[j \cdot \frac{n}{2} + 1, (j+1) \cdot \frac{n}{2}]$.
Το κλασικό διαίρει και βασίλευε θα ήταν:

$$
\begin{aligned}
C_{1,1} &= A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} \\
C_{1,2} &= A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\
C_{2,1} &= A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} \\
C_{2,2} &= A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2}
\end{aligned}
$$

Η αναδρομική σχέση που προκύπτει είναι $T(n) = 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n^2) \Rightarrow T(n) = n^3$.

Αλγόριθμος Strassen

$$M_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$
$$M_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$$
$$M_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$$
$$\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$$
$$\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$$
$$M_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$

Αλγόριθμος Strassen

$\mathrm{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$
$\mathrm{M}_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$
$\mathrm{M}_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$
$\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$
$\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$
$\mathrm{M}_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$
Χρησιμοποιώντας τα $M_1, \ldots, M_7$ μπορούμε να υπολογίσουμε *μόνο με προσθέσεις* τα $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{2,1}, C_{2,2}$.

Αλγόριθμος Strassen

$M_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$
$M_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$
$M_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$
$\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$
$\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$
$M_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$
Χρησιμοποιώντας τα $M_1, \ldots, M_7$ μπορούμε να υπολογίσουμε *μόνο με προσθέσεις* τα $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{2,1}, C_{2,2}$.

Χρόνο εκτέλεσης $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + O(n^2) \Rightarrow T(n) = n^{\log_2 7 + o(1)} \approx n^{2.8074}$

Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο του Strassen

- Σχετικά αργός στην πράξη. Οι διαδοχοί του ακόμα πιο αργοί.

Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο του Strassen

- Σχετικά αργός στην πράξη. Οι διαδοχοί του ακόμα πιο αργοί.
- Δεν καταλαβαίνουμε επαρκώς τους αλγεβρικούς αυτούς αλγόριθμους. Ενδεχομένως αυτό είναι εμπόδιο για *πολύ γρηγορότερους* θεωρητικούς αλγορίθμους.

Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο του Strassen

- Σχετικά αργός στην πράξη. Οι διαδοχοί του ακόμα πιο αργοί.
- Δεν καταλαβαίνουμε επαρκώς τους αλγεβρικούς αυτούς αλγόριθμους. Ενδεχομένως αυτό είναι εμπόδιο για *πολύ γρηγορότερους* θεωρητικούς αλγορίθμους.
- Ερώτηση: Υπάρχει 'συνδυαστικός' αλγόριθμος για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες Boole;

Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο του Strassen

- Σχετικά αργός στην πράξη. Οι διαδοχοί του ακόμα πιο αργοί.
- Δεν καταλαβαίνουμε επαρκώς τους αλγεβρικούς αυτούς αλγόριθμους. Ενδεχομένως αυτό είναι εμπόδιο για *πολύ γρηγορότερους* θεωρητικούς αλγορίθμους.
- Ερώτηση: Υπάρχει ‘συνδυαστικός’ αλγόριθμος για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες Boole;
- Άτυπη υπόθεση δυσκολίας: δεν υπάρχει υποκυβικός ‘συνδυαστικός’ αλγόριθμος για το πρόβλημα BMM.

Σχόλια πάνω στον αλγόριθμο του Strassen

- Σχετικά αργός στην πράξη. Οι διαδοχοί του ακόμα πιο αργοί.
- Δεν καταλαβαίνουμε επαρκώς τους αλγεβρικούς αυτούς αλγόριθμους. Ενδεχομένως αυτό είναι εμπόδιο για *πολύ γρηγορότερους* θεωρητικούς αλγορίθμους.
- Ερώτηση: Υπάρχει 'συνδυαστικός' αλγόριθμος για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες Boole;
- Άτυπη υπόθεση δυσκολίας: δεν υπάρχει υποκυβικός 'συνδυαστικός' αλγόριθμος για το πρόβλημα BMM.
- Καλύτερος 'συνδυαστικός' αλγόριθμος μέχρι στιγμής από Yu: $O((n^3/\log^4 n)\cdot \mathrm{poly}(\log\log n))$.

Ερμηνεία του αλγόριθμου του Strassen

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους πίνακες που δημιουργεί ο αλγόριθμος του Strassen συνδυαστικά. Στον υπολογισμό του A^2, τα $A_{i,j}$ αντιστοιχούν στο να σπάσουμε τον γράφο σε 4 μέρη με ίδιο πλήθος κορυφών.
Η πράξη $\mathbf{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})$ σε τι αντιστοιχεί;

Ερμηνεία του αλγόριθμου του Strassen

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους πίνακες που δημιουργεί ο αλγόριθμος του Strassen συνδυαστικά. Στον υπολογισμό του A^2, τα $A_{i,j}$ αντιστοιχούν στο να σπάσουμε τον γράφο σε 4 μέρη με ίδιο πλήθος κορυφών.
Η πράξη $\mathbf{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})$ σε τι αντιστοιχεί;

Όχι ιδιαίτερα διαφωτιστική ερμηνεία. Υπολογισμός με μονότονα κυκλώματα;

Σχέση του BMM με κλασικά προβλήματα

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας BMM.

- Σχέση με κλίκα. Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $n^{\omega \cdot k/3} \cdot (n)$ αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k σε έναν γράφο με n κόμβους.

Σχέση του BMM με κλασικά προβλήματα

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας BMM.

- Σχέση με κλίκα. Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $n^{\omega\cdot k/3}\cdot(n)$ αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k σε έναν γράφο με n κόμβους.
- Μέγιστη Τομή σε $2^{\omega n/3}\cdot \mathrm{poly}(n)$ χρόνο (σειρά ασκήσεων!).

Σχέση του BMM με κλασικά προβλήματα

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας BMM.

- Σχέση με κλίκα. Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $n^{\omega \cdot k/3} \cdot (n)$ αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k σε έναν γράφο με n κόμβους.
- Μέγιστη Τομή σε $2^{\omega n/3} \cdot \mathrm{poly}(n)$ χρόνο (σειρά ασκήσεων!).
- Πρόβλημα εύρεσης αρνητικού τριγώνου με βάρη στους κόμβους σε n^{ω} χρόνο.

Σχέση του BMM με κλασικά προβλήματα

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας BMM.

- Σχέση με κλίκα. Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $n^{\omega\cdot k/3}\cdot(n)$ αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k σε έναν γράφο με n κόμβους.
- Μέγιστη Τομή σε $2^{\omega n/3}\cdot \mathrm{poly}(n)$ χρόνο (σειρά ασκήσεων!).
- Πρόβλημα εύρεσης αρνητικού τριγώνου με βάρη στους κόμβους σε n^{ω} χρόνο.
- Προβλήματα σε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα.

Σχέση του BMM με κλασικά προβλήματα

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας BMM.

- Σχέση με κλίκα. Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $n^{\omega \cdot k/3} \cdot (n)$ αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k σε έναν γράφο με n κόμβους.
- Μέγιστη Τομή σε $2^{\omega n/3} \cdot \mathrm{poly}(n)$ χρόνο (σειρά ασκήσεων!).
- Πρόβλημα εύρεσης αρνητικού τριγώνου με βάρη στους κόμβους σε n^{ω} χρόνο.
- Προβλήματα σε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα.

Πρόβλημα Κλίκας

Πρόβλημα. Δίνεται ένας γράφος με n κόμβους, και ένας αριθμός k (ας υποθέσουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 3), και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k.

Πρόβλημα Κλίκας

Πρόβλημα. Δίνεται ένας γράφος με n κόμβους, και ένας αριθμός k (ας υποθέσουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 3), και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k.

Κατασκευάζουμε πίνακες $A, B \in \{0, 1\}^{\binom{n}{k/3}}$, με τις γραμμές να αντιστοιχούν στα υποσύνολα $S \subseteq [n], |S| = k/3$.

Πρόβλημα Κλίκας

Πρόβλημα. Δίνεται ένας γράφος με n κόμβους, και ένας αριθμός k (ας υποθέσουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 3), και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k.

Κατασκευάζουμε πίνακες $A, B \in \{0,1\}^{\binom{n}{k/3}}$, με τις γραμμές να αντιστοιχούν στα υποσύνολα $S \subseteq [n], |S| = k/3$. Έχουμε $A[S][S'] = 1$ αν α) $S \cap S' = \emptyset$, β) το $S \cup S'$ είναι κλίκα. Όμοια για τον B.

Πρόβλημα Κλίκας

Πρόβλημα. Δίνεται ένας γράφος με n κόμβους, και ένας αριθμός k (ας υποθέσουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 3), και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k.

Κατασκευάζουμε πίνακες $A, B \in \{0,1\}^{\binom{n}{k/3}}$, με τις γραμμές να αντιστοιχούν στα υποσύνολα $S \subseteq [n], |S| = k/3$. Έχουμε $A[S][S'] = 1$ αν α) $S \cap S' = \emptyset$, β) το $S \cup S'$ είναι κλίκα. Όμοια για τον B. Τότε, η εγγραφή S, S' στο γινόμενο Boole των A, B ισούται με

$$\bigvee_{S'' \subseteq [n], |S''| = k/3} A[S][S''] \wedge B[S''][S'].$$

Πρόβλημα Κλίκας

Πρόβλημα. Δίνεται ένας γράφος με n κόμβους, και ένας αριθμός k (ας υποθέσουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 3), και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k.

Κατασκευάζουμε πίνακες $A, B \in \{0,1\}^{\binom{n}{k/3}}$, με τις γραμμές να αντιστοιχούν στα υποσύνολα $S \subseteq [n], |S| = k/3$. Έχουμε $A[S][S'] = 1$ αν α) $S \cap S' = \emptyset$, β) το $S \cup S'$ είναι κλίκα. Όμοια για τον B. Τότε, η εγγραφή S, S' στο γινόμενο Boole των A, B ισούται με

$$\bigvee_{S'' \subseteq [n], |S''| = k/3} A[S][S''] \wedge B[S''][S'].$$

Μπορούμε να διαβάσουμε αν υπάρχει κλίκα μεγέθους k στο γράφημά μας;

Αναγωγή κλίκας

Αν κοιτάξουμε το γινόμενο Boole A^3:

$$A^3[S][S] = \bigvee_{S',S''} A[S][S'] \wedge A[S'][S''] \wedge A[S''][S].$$

Αν $(+, \cdot) = (\bigvee, wedge)$ τότε

$$A^3[S][S] = \sum_{S',S''} A[S][S'] \cdot A[S'][S''] \cdot A[S''][S].$$

Πότε βγαινει 1 το $A^3[S][S]$; Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης;

Υποκυβικές Αναγωγές

Πάλι τρίγωνα!

- Πρόβλημα Ένα δύο Ζευγών Τριγώνων. Δίνεται τριμερής γράφος G με σύνολο κορυφών (I, J, K), $|I| = |J| = |K| = n$. Για κάθε $i \in I, j \in J$ υπάρχει $k \in K$ ώστε τα i, j, k να σχηματίζουν τρίγωνο;

Υποκυβικές Αναγωγές

Πάλι τρίγωνα!

- Πρόβλημα Άνα δύο Ζευγών Τριγώνων. Δίνεται τριμερής γράφος G με σύνολο κορυφών (I, J, K), $|I| = |J| = |K| = n$. Για κάθε $i \in I, j \in J$ υπάρχει $k \in K$ ώστε τα i, j, k να σχηματίζουν τρίγωνο;
- Δίνεται γράφος G με n κορυφές. Περιέχει τρίγωνο;

Υποκυβικές Αναγωγές

Πάλι τρίγωνα!

- Πρόβλημα Άνα δύο Ζευγών Τριγώνων. Δίνεται τριμερής γράφος G με σύνολο κορυφών (I, J, K), $|I| = |J| = |K| = n$. Για κάθε $i \in I, j \in J$ υπάρχει $k \in K$ ώστε τα i, j, k να σχηματίζουν τρίγωνο;
- Δίνεται γράφος G με n κορυφές. Περιέχει τρίγωνο;
- BMM υποκυβικά ισοδύναμο με τα άνω δύο προβλήματα.

Αναγωγή τριγώνου σε BMM

Έστω ο πίνακας γειτνίασης A του γραφήματος G. Τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{k=1}^{n} A[i,k] \wedge A^2[k,j] =$$

$$\bigvee_{k=1}^{n} \left(A[i,k] \wedge \left(\bigvee_{k'=1}^{n} A[k,k'] \wedge A[k',j] \right) \right) = \bigvee_{k,k' \in [n]} A[i,k] \wedge A[k,k'] \wedge A[k',j]$$

Αναγωγή τριγώνου σε BMM

Έστω ο πίνακας γειτνίασης A του γραφήματος G. Τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{k=1}^{n} A[i,k] \wedge A^2[k,j] =$$

$$\bigvee_{k=1}^{n} \left(A[i,k] \wedge \left(\bigvee_{k'=1}^{n} A[k,k'] \wedge A[k',j] \right) \right) = \bigvee_{k,k' \in [n]} A[i,k] \wedge A[k,k'] \wedge A[k',j]$$

Πιο απλά, αν $(+,\cdot) = (\bigvee, \wedge)$ έχουμε

$$A^3[i,j] = \sum_{k,k' \in [n]} A[i,k] \cdot A[k,k'] \cdot A[k',j]$$

Εντοπισμός τριγώνου με δύο πολλαπλασιασμούς πινάκων Boole.

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Κλάση ισοδυναμίας!

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Κλάση ισοδυναμίας!

Δείξαμε μέχρι στιγμή μόνο την τελευταία ισοδυναμία.

Συνεχίζοντας τη συμπλήρωση της αλυσίδας

Αναγωγή Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου.

Συνεχίζοντας τη συμπλήρωση της αλυσίδας

Αναγωγή Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου.

Υπενθύμιση. Δίνεται τριμερής γράφος $G = (I \cup J \cup K, E)$ και ζητείται για κάθε $(i, j) \in I \times J$ να βρεθεί αν υπάρχει $k \in K$ ώστε i, j, k να σχηματίζουν τρίγωνο στο G, δηλαδή $(i, j), (j, k), (k, i) \in E(G)$.

Συνεχίζοντας τη συμπλήρωση της αλυσίδας

Αναγωγή Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου.

Υπενθύμιση. Δίνεται τριμερής γράφος $G = (I \cup J \cup K, E)$ και ζητείται για κάθε $(i, j) \in I \times J$ να βρεθεί αν υπάρχει $k \in K$ ώστε i, j, k να σχηματίζουν τρίγωνο στο G, δηλαδή $(i, j), (j, k), (k, i) \in E(G)$.

Κλασική τακτική αναγωγής: Αν θέλεις να δείξεις ότι ένα πρόβλημα *αναφοράς* (‘Βρες όλα τα…’) ανάγεται σε ένα πρόβλημα απόφασης, σπάσε το σε κομμάτια, και τρέξε σειριακά τον δεύτερο αλγόριθμο στα δημιουργηθέντα στιγμιότυπα.

Έστω $|I| = |J| = |K| = n$. Σπάμε τα
I, J, K σε s μέρη το καθένα. Έχουμε $(n/s)^3$ συνδυασμούς $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ να ελέγξουμε.

Έστω $|I| = |J| = |K| = n$. Σπάμε τα I, J, K σε s μέρη το καθένα. Έχουμε $(n/s)^3$ συνδυασμούς $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ να ελέγξουμε.

Για κάθε $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ τρέχουμε τον αλγόριθμο εντοπισμού τριγώνου. Αν επιστρέψει τρίγωνο (i, j, k) το αναφέρουμε, και αφαιρούμε την ακμή (i, j).

Έστω $|I| = |J| = |K| = n$. Σπάμε τα
I, J, K σε s μέρη το καθένα. Έχουμε $(n/s)^3$ συνδυασμούς $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ να ελέγξουμε.

Για κάθε $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ τρέχουμε τον αλγόριθμο εντοπισμού τριγώνου. Αν επιστρέψει τρίγωνο (i, j, k) το αναφέρου-
με, και αφαιρούμε την ακμή (i, j). Προχωρούμε στην επόμενη τριάδα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$.

$\star$ Θα αφαιρεθούν το πολύ n^2 ακμές.

Έστω $|I| = |J| = |K| = n$. Σπάμε τα
I, J, K σε s μέρη το καθένα. Έχουμε $(n/s)^3$ συνδυασμούς $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ να ελέγξουμε.

Για κάθε $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ τρέχουμε τον αλγόριθμο εντοπισμού τριγώνου. Αν επιστρέψει τρίγωνο (i, j, k) το αναφέρου-
με, και αφαιρούμε την ακμή (i, j). Προχωρούμε στην επόμενη τριάδα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$.

$\star$ Θα αφαιρεθούν το πολύ n^2 ακμές.
$\star$ Κάθε (i, j) που συμμετέχει σε τρίγωνο θα αναφερθεί.

Έστω $|I| = |J| = |K| = n$. Σπάμε τα
I, J, K σε s μέρη το καθένα. Έχουμε $(n/s)^3$ συνδυασμούς $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ να ελέγξουμε.

Για κάθε $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$ τρέχουμε τον αλγόριθμο εντοπισμού τριγώνου. Αν επιστρέψει τρίγωνο (i, j, k) το αναφέρουμε, και αφαιρούμε την ακμή (i, j). Προχωρούμε στην επόμενη τριάδα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$.

$\star$ Θα αφαιρεθούν το πολύ n^2 ακμές.
$\star$ Κάθε (i, j) που συμμετέχει σε τρίγωνο θα αναφερθεί.
$\star$ Θα τρέξουμε τον αλγόριθμο εντοπισμού τριγώνου το πολύ $O(n^2 + (n/s)^3)$ φορές.Συνολικός χρόνος $O((n^2 + (n/s)^3) \cdot s^{3-\epsilon} \underbrace{=}_{s=n^{1/3}} O(n^{3-\epsilon/3})$.

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Κλάση ισοδυναμίας!

Αλυσίδα αναγωγών

BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων $\Rightarrow$ Εντοπισμός Τριγώνου $\Rightarrow$ BMM

Κλάση ισοδυναμίας!

Μας λείπει μόνο η ισοδυναμία BMM $\Rightarrow$ Ανά δύο Ζεύγη Τριγώνων

Τελευταία Αναγωγή

Δεδομένων πινάκων Boole $A, B \in \{0, 1\}^{n \times n}$, φτιάχνουμε τρεις διαμερίσεις I, J, K, μεγέθους n καθεμία.

Τελευταία Αναγωγή

Δεδομένων πινάκων Boole $A, B \in \{0, 1\}^{n \times n}$, φτιάχνουμε τρεις διαμερίσεις I, J, K, μεγέθους n καθεμία.

- Για κάθε $i \in I, k \in K$ βάζουμε ακμή (i, k) αν $A[i][k] = 1$.

Τελευταία Αναγωγή

Δεδομένων πινάκων Boole $A, B \in \{0, 1\}^{n \times n}$, φτιάχνουμε τρεις διαμερίσεις I, J, K, μεγέθους n καθεμία.

- Για κάθε $i \in I, k \in K$ βάζουμε ακμή (i, k) αν $A[i][k] = 1$.
- Για κάθε $j \in J, k \in K$ βάζουμε ακμή (j, k) αν $B[k][j] = 1$.

Τελευταία Αναγωγή

Δεδομένων πινάκων Boole $A, B \in \{0,1\}^{n \times n}$, φτιάχνουμε τρεις διαμερίσεις I, J, K, μεγέθους n καθεμία.

- Για κάθε $i \in I, k \in K$ βάζουμε ακμή (i, k) αν $A[i][k] = 1$.
- Για κάθε $j \in J, k \in K$ βάζουμε ακμή (j, k) αν $B[k][j] = 1$.
- Ανάμεσα $i \in I, j \in J$ βάζουμε ακμή.

Τελευταία Αναγωγή

Δεδομένων πινάκων Boole $A, B \in \{0, 1\}^{n \times n}$, φτιάχνουμε τρεις διαμερίσεις I, J, K, μεγέθους n καθεμία.

- Για κάθε $i \in I, k \in K$ βάζουμε ακμή (i, k) αν $A[i][k] = 1$.
- Για κάθε $j \in J, k \in K$ βάζουμε ακμή (j, k) αν $B[k][j] = 1$.
- Ανάμεσα $i \in I, j \in J$ βάζουμε ακμή.

Προσοχή

Είδαμε ότι APSP ανήκει σε μια κλάση ισοδυναμίας με προβλήματα εντοπισμού και αναφοράς τριγώνων *αρνητικού* βάρους.

Αλλά το BMM ανήκει σε κλάδη ισοδυναμίας με προβλήματα εντοπισμού και αναφοράς τριγώνων *χωρίς* την απαίτηση του αρνητικού βάρους.

Προσοχή

Είδαμε ότι APSP ανήκει σε μια κλάση ισοδυναμίας με προβλήματα εντοπισμού και αναφοράς τριγώνων *αρνητικού* βάρους.

Αλλά το BMM ανήκει σε κλάδη ισοδυναμίας με προβλήματα εντοπισμού και αναφοράς τριγώνων *χωρίς* την απαίτηση του αρνητικού βάρους.

Διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, διαφορετικά προβλήματα. Το BMM είναι πιο εύκολο, χρησιμοποιώντας αλγεβρικά εργαλεία. Συνδυαστικοί αλγόριθμοι όμως;

Απόσταση Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο

Ένα από τα πιο κλασικά προβλήματα στην επεξεργασία συμβολοσειρών. Δίνονται δύο συμβολοσειρές P, T με $|P| = n, |T| = m < n$ (ας θεωρήσουμε $m = \Omega(n)$) και ζητείται να βρεθεί για κάθε ολίσθηση $o \leq n - m + 1$ το

$$HAM(P[o, o+1, \ldots, o+m-1], T].$$

Δηλαδή, για κάθε υποσυμβολοσειρά του P να βρεθεί το πλήθος των συμβόλων στο οποίο διαφέρει με το T.

Απόσταση Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο

Ένα από τα πιο κλασικά προβλήματα στην επεξεργασία συμβολοσειρών. Δίνονται δύο συμβολοσειρές P, T με $|P| = n, |T| = m < n$ (ας θεωρήσουμε $m = \Omega(n)$) και ζητείται να βρεθεί για κάθε ολίσθηση $o \leq n - m + 1$ το

$$HAM(P[o, o+1, \ldots, o+m-1], T].$$

Δηλαδή, για κάθε υποσυμβολοσειρά του P να βρεθεί το πλήθος των συμβόλων στο οποίο διαφέρει με το T.

Αλγόριθμος Fischer-Patterson: $O(n^{3/2})$.

Απόσταση Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο

Ένα από τα πιο κλασικά προβλήματα στην επεξεργασία συμβολοσειρών. Δίνονται δύο συμβολοσειρές P, T με $|P| = n, |T| = m < n$ (ας θεωρήσουμε $m = \Omega(n)$) και ζητείται να βρεθεί για κάθε ολίσθηση $o \leq n - m + 1$ το

$$HAM(P[o, o+1, \ldots, o+m-1], T].$$

Δηλαδή, για κάθε υποσυμβολοσειρά του P να βρεθεί το πλήθος των συμβόλων στο οποίο διαφέρει με το T.

Αλγόριθμος Fischer-Patterson: $O(n^{3/2})$.

$\star$ Σειρά ασκήσεων: Το BMM ανάγεται σε αυτό.

Συμπεράσματα για απόσταση Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο

- Παίρνουμε ότι ένας $n^{\omega/2-\epsilon}$ αλγόριθμος δίνει καλύτερο αλγόριθμος για πολλαπλασιασμό πινάκων Boole.
- Παίρνουμε ότι ένας οποιοσδήποτε $n^{3/2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα 'πρέπει' να χρησιμοποιεί πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Δεδομένου ότι όλοι οι αλγόριθμοι που ξέρουμε για το πρόβλημα χρησιμοποιούν FFT, λογικά ένας τέτοιος αλγόριθμος πρέπει να χρησιμοποιεί και FFT και πολλαπλασιασμό πινάκων.

Συμπεράσματα για απόσταση Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο

- Παίρνουμε ότι ένας $n^{\omega/2-\epsilon}$ αλγόριθμος δίνει καλύτερο αλγόριθμος για πολλαπλασιασμό πινάκων Boole.
- Παίρνουμε ότι ένας οποιοσδήποτε $n^{3/2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα ‘πρέπει’ να χρησιμοποιεί πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Δεδομένου ότι όλοι οι αλγόριθμοι που ξέρουμε για το πρόβλημα χρησιμοποιούν FFT, λογικά ένας τέτοιος αλγόριθμος πρέπει να χρησιμοποιεί και FFT και πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Εναλλακτικά, πρέπει να ‘μιμείται’ τη λογική του αλγόριθμου του Strassen.

Ευχαριστούμε!