Αντισταθμιστική Ανάλυση

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα

Μερκούρης Παπαμιχαήλ

ΔΠΜΣ στους Αλγόριθμους, τη Λογική και τα Διακριτά Μαθηματικά

Χειμερινό Εξάμηνο 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Λίγη Διαίσθηση

- Πόσος χρόνος διαβάσματος χρειάζεται για να περάσει ένας φοιτητής το μάθημα Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα;
- Θεωρούμε ότι, ο φοιτητής μας, θα χρειαστεί να δώσει το μάθημα πολλές φορές.
- Στην αρχή διαβάζει για ένα εξάμηνο.
- Την επόμενη φορά θα θυμάται κάποια πράγματα και έτσι θα διαβάσει λιγότερο.
- Την μεθεπόμενη φορά, θα έχει αφομοιώσει ακόμη περισσότερο μέρος και θα χρειαστεί ακόμη λιγότερο χρόνο, κ.ο.κ.
- Αν τελικά, δώσει το μάθημα m φορές, ποια η χρονική πολυπλοκότητα της ακολουθίας πράξεων *Διάβασμα για Εξετάσεις* ;

Λίγη Διαίσθηση Ακόμη

Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης

Στην χειρότερη περίπτωση η πράξη *Διάβασμα για Εξετάσεις* χρειάζεται χρόνο, ένα εξάμηνο. Ο φοιτητής μας θα δώσει το μάθημα m φορές, άρα **θα χρειαστεί συνολικό χρόνο** m **εξάμηνα**.

Είναι *δίκαιη* μια τέτοια ανάλυση, όμως;

Συμπεράσματα Παραδείγματος

Μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα από τα παραπάνω:

1. Μία αργή πράξη *Διάβασμα για Εξετάσεις* **αντισταθμίζει** τον χρόνο για μια επόμενη πράξη.
2. Κάπου διατηρείται μια μερική κατάσταση. Η πράξη μας ενεργεί πάνω σε μια **δομή μνήμης**. Στο παράδειγμα, πάνω στην μνήμη του φοιτητή.

Παρατηρήσεις

Στην συνέχεια, θα δούμε, αυστηρότερα, πως οι παραπάνω κύριες παρατηρήσεις, θα μας βοηθήσουν να αναπτύξουμε μια πιο προσεκτική ανάλυση για διάφορους αλγορίθμους.

Περιεχόμενα

Σταθεροποίηση Εννοιών

Στην συνέχεια, εξετάζουμε:

- Ακολουθίες πράξεων,
- πάνω σε μια δομή δεδομένων.

Σκοπός

Σκοπός μας θα είναι να υπολογίσουμε την *μέση τιμή του χρόνου* που απαιτείται για την την εκτέλεση κάποιας πράξης δομή δεδομένων, επί όλων των εκτελούμενων πράξεων.
Σε αντίθεση με την πιθανοθεωρητική ανάλυση ενός αλγορίθμου, *εδώ δεν θα υποθέσουμε κάποια κατανομή πιθανότητας στα στιγμιότυπα εισόδου.*

Αντισταθμιστική (Amortized) Ανάλυση

Αντισταθμιστική (Amortized) Ανάλυση

Έστω μια δομή δεδομένων D και μια ακολουθία πράξεων $\mathcal{OPS} = \{op_1, op_2, \ldots op_m\}$. Θα συμβολίζουμε με $cost(op_i) = c_i$ τον χρόνο που απαιτεί η πράξη op_i. Τότε, ο συνολικός χρόνος της ακολουθίας πράξεων, επί της D, θα είναι,

$$cost(\mathcal{OPS}) = \sum_{i=1}^{n} cost(op_i)$$

Έστω, κάποια ποσότητα $T(\mathcal{OPS})$, τέτοια ώστε $T(\mathcal{OPS}) \geq C(\mathcal{OPS})$. Θα λέμε αντισταθμιστικό κόστος της op_i, το

$$am\_cost(op_i) = \frac{T}{n}$$

Σχέση Ανάλυσης Χειρότερης Περίπτωσης με την Αντισταθμιστική Ανάλυση

1. Παρατηρούμε πως απλά έχουμε διευρύνει την έννοια κόστους ενός αλγορίθμου.
2. Η Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης είναι υποπερίπτωση της Αντισταθμιστικής Ανάλυσης:

$$T(\mathcal{OPS})_{WC} = n \cdot \max\{c \mid c = cost(op), op \in \mathcal{OPS}\}$$

3. Με την γενίκευση αυτή, προσδοκούμε να πάρουμε ένα καλύτερο άνω φράγμα $T(\mathcal{OPS})$, του πραγματικού κόστους $C(\mathcal{OPS})$.
4. Τέλος, επισημαίνουμε για ακόμη μια φορά, ότι *δεν έχουμε θεωρήσει κάποια κατανομή πιθανότητας πάνω στην είσοδο*.

Περιεχόμενα

Στοίβα

Θεωρούμε την δομή δεδομένων Στοίβα S, με τις γνωστές πράξεις:

- $push(S, x)$: η οποία τοποθετεί το αντικείμενο x στην κορυφή της στοίβας S.
- $pop(S)$: η οποία αφαιρεί το αντικείμενο που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, το οποίο και επιστρέφει.

Θεωρούμε, επίσης, την πράξη ανάληψης πολλαπλών αντικειμένων, η οποία περιγράφεται από τον παρακάτω αλγόριθμο.

$multi\_pop(S, k)$

Ενόσω $\neg empty(S)$ *και* $k > 0$:
  $pop(S)$
  $k \leftarrow k - 1$

Δυαδικός Μετρητής

Θεωρούμε, επίσης, την δομή δεδομένων, ενός Δυαδικού Μετρητή BC, τον οποίο απλά υλοποιούμε ως μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων σταθερού μήκους. Έναν πίνακα δυαδικών ψηφίων (bits).

Θεωρούμε την πράξη $\mathit{flip}(b)$, η οποία αντιστρέφει ένα δυαδικό ψηφίο.

Θεωρούμε, επίσης, την πράξη επομένου, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω αλγόριθμο.

$succ(BC)$

Για $i \leftarrow 0$ **ως** $|BC| - 1$:

  $BC[i] \leftarrow \mathit{flip}(BC[i])$

  Αν $BC[i] = 1$:

    break

Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης

1. Αμφότεροι οι παραπάνω αλγόριθμοι έχουν Πολυπλοκότητα Χειρότερης Περίπτωσης $O(n^2)$, *για μια ακολουθία* n *πράξεων*.
2. Το κόστος οποιασδήποτε πράξης πολλαπλής ανάληψης φράσσεται από το κόστος της $multi\_pop(S, |S|)$.
3. Το κόστος οποιασδήποτε πράξης επομένου, φράσσεται από το κόστος της $succ(BC)$, όπου $BC = [1, 1, \ldots, 1]$.

Θα δείξουμε ότι, η Αντισταθμιστική Ανάλυση θα μας δώσει χρονική πολυπλοκότητα $O(n)$, για την *ίδια* ακολουθία n πράξεων.

Περιεχόμενα

Μέθοδοι Αντισταθμιστικής Ανάλυσης

Θα δώσουμε τρεις μεθόδους για την εύρεση ενός άνω φράγματος $T(\mathcal{OPS})$, της $cost(\mathcal{OPS})$:

1. **Αθροιστική Μέθοδος**, όπου μέσω χειρισμό αθροισμάτων θα θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα σφικτό άνω φράγμα του αθροίσματος $cost(\mathcal{OPS})$.
2. **Χρεωπιστωτική Μέθοδος**, όπου αναθέτουμε επί τούτου ένα κόστος στους διάφορους τύπους πράξεων, χρεώνοντας ορισμένες περισσότερο ή λιγότερο, από όσο πραγματικά κοστίζουν.
3. **Ενεργειακή Μέθοδος**, όπου, αντί να αναθέσουμε ένα κόστος στην κάθε πράξη, θεωρούμε μια συνάρτηση δυναμικού για ολόκληρη την δομή δεδομένων D.

Η Αθροιστική Μέθοδος: Στοίβα (1)

Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη από της μεθόδους, αυτή της Αθροιστικής Μεθόδου.

Πρόταση 1

Έστω μία κενή στοίβα S. Έστω, επίσης, μια ακολουθία $\mathcal{OPS} = \{op_1, op_2, \ldots, op_n\}$, n πράξεων, όπου $op_i \in \{pop(\cdot), push(\cdot,\cdot), multi\_pop(\cdot,\cdot)\}$. Τότε,

$$cost(\mathcal{OPS}) = O(n)$$

Απόδειξη Πρότασης 1

Υποθέτουμε ότι $cost(pop(\cdot)) = cost(push(\cdot)) = O(1)$. Παρατηρούμε, ότι η πράξη $multi\_pop(\cdot, \cdot)$ είναι μια ακολουθία διαδοχικών πράξεων $pop(\cdot)$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι δεν μπορούμε να εξάγουμε περισσότερα στοιχεία, απ' όσα έχουμε αποθέσει. Έτσι,

$$\sum_{op_i = pop(\cdot)} 1 \leq \sum_{op_i = push(\cdot)} 1 \leq n$$

Όμως,

$$cost(\mathcal{OPS}) = \sum_{op_i = pop(\cdot)} 1 + \sum_{op_i = push(\cdot)} 1 \leq 2n$$

Αθροιστική Μέθοδος: Δυαδικός Μετρητής (1)

Πρόταση 2

Έστω ένας δυαδικός μετρητής BC, αρχικοποιημένος σε 0. Έστω, επίσης, μια ακολουθία $\mathcal{OPS} = \{op_1, op_2, \ldots, op_n\}$, n πράξεων επομένου. Τότε,

$$cost(\mathcal{OPS}) = O(n)$$

Ένας τρόπος να φράξουμε το κόστος της ακολουθίας είναι να μετρήσουμε το πλήθος των αντιστροφών που συμβαίνουν σε κάθε δυαδικό ψηφίο, του μετρητή BC. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός αυτός εξαρτάται μόνο από την θέση του ψηφίου. Το i–οστό ψηφίο, θα αντιστραφεί μόνο τις $\lfloor n/2^i \rfloor$ φορές.

Αθροιστική Μέθοδος: Δυαδικός Μετρητής (2)

Απόδειξη Πρότασης 2

Έστω, ότι $|BC| = k$. Έστω, f_i το πλήθος αντιστροφών που έχουν συμβεί στο i–οστό δυαδικό ψηφίο. Τότε, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
cost(\mathcal{OPS}) &= \sum_{i=1}^{k} f_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \\
&< n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \\
&= 2n
\end{aligned}
$$

Η Χρεωπιστωτική Μέθοδος

1. Όπως είπαμε, στην μέθοδο αυτή θα χρεώνουμε διαφορετικά κόστη τις εκάστοτε πράξεις, άλλοτε υπερτιμώντας το κόστος τους και άλλοτε υποτιμώντας.
2. Η ιδέα είναι κάποιες πράξεις να *προπληρώνουν* άλλες πράξεις.
3. Έτσι, θα είναι σαν να δανειζόμαστε από τον μελλοντικό εαυτό μας.
4. Θα αναφερόμαστε στα, επί τούτου κόστη, ως ***λογιστικό κόστος***.
5. Αν c_i το πραγματικό κόστος και $\hat{c}_i$ το λογιστικό κόστος, απαιτούμε,

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

ώστε να έχει νόημα η ανάλυσή μας.

Χρεωπιστωτική Μέθοδος: Στοίβα

Επανεξετάζουμε τα παραδείγματά μας, δίνοντας νέες αποδείξεις για τις Προτάσεις 1,2. Ξεκινάμε με το παράδειγμα της στοίβας.

Απόδειξη Πρότασης 1

Θεωρούμε τα ακόλουθα λογιστικά κόστη για της πράξης της στοίβας.

$$\begin{aligned} cost(push(\cdot)) &= 2 \\ cost(pop(\cdot,\cdot)) &= 0 \\ cost(multi\_pop(\cdot,\cdot)) &= 0 \end{aligned}$$

Η διαίσθηση πίσω από αυτή την ανάθεση είναι ότι κάθε στοιχείο θα πληρώσει 1 ευρώ για να μπει στην στοίβα, ενώ προπληρώνει και την πράξη εξαγωγής του από την στοίβα.

Χρεωπιστωτική Μέθοδος: Δυαδικός Μετρητής

Συνεχίζουμε, στον δυαδικό μετρητή.

Απόδειξη Πρότασης 2

Αναλύουμε την πράξη $flip(\cdot)$, σε ενεργοποίηση $set(\cdot)$ και επαναφορά $reset(\cdot)$. Η ενεργοποίηση, θα «ανάβει» ένα δυαδικό ψηφίο, ενώ η επαναφορά θα το «σβήνει». Θεωρούμε τα παρακάτω λογιστικά κόστη.

$$cost(set(\cdot)) = 2$$
$$cost(reset(\cdot)) = 0$$

Η διαίσθηση είναι ότι όταν ενεργοποιούμε ένα ψηφίο, πληρώνουμε τόσο για την πράξη καθεαυτή, όσο και για την επικείμενη επαναφορά του.

Η Ενεργειακή Μέθοδος (1)

1. Αντί να πιστώνουμε κάθε πράξη, θα «αποταμιεύουμε» τις επιπλέον χρεώσεις, στην ίδια την δομή δεδομένων.
2. Θα το πετύχουμε αυτό με μια ***συνάρτηση δυναμικού*** $\Phi \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, όπου $\mathcal{D}$ το σύνολο των στιγμιοτύπων, στα οποία μπορεί να βρεθεί η δομή δεδομένων μας.
3. Από τον ορισμό του δυναμικού παίρνουμε μια ανάθεση *λογιστικού κόστους* ως εξής,

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

   όπου D_i η κατάσταση της δομής δεδομένων μετά την εφαρμογή της i–οστής πράξης, στην κατάσταση D_{i-1}.
4. *Το λογιστικό κόστος της κάθε πράξης, ισούται με το πραγματικό της κόστος συν την αύξηση του δυναμικού που προκύπτει από την πράξη αυτή.*

Η Ενεργειακή Μέθοδος (2)

Πότε, είναι ορθή η ανάθεση λογιστικών κοστών, μέσω μιας συνάρτησης δυναμικού·

Πρόταση 3

Έστω το σύνολο $\mathcal{D}$, το σύνολο διαμορφώσεων μίας δομής δεδομένων και μια συνάρτηση δυναμικού $\Phi \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Έστω, επίσης, $\mathcal{OPS}$ μια ακολουθία n πράξεων, με $c_1, c_2, \ldots, c_n$ τα κόστη των πράξεων. Θεωρούμε τα κόστη,

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

όπου D_i η κατάσταση της δομής δεδομένων μετά την εφαρμογή της i–οστής πράξης, στην κατάσταση D_{i-1}. Τα λογιστικά κόστη φράσουν άνω τα πραγματικά κόστη, αν,

$$\Phi(D_n) > \Phi(D_0)$$

Η Ενεργειακή Μέθοδος (3)

Απόδειξη Πρότασης 3

Αρκεί ένα απλός χειρισμός αθροισμάτων. Έτσι,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i &= \sum_{i=1}^{n} (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i1-})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0) \end{aligned}$$

Η Ενεργειακή Μέθοδος (4)

Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Εν γένει, δεν γνωρίζουμε το πλήθος των πράξεων που πρόκειται να εκτελεστούν.
2. Έτσι, απαιτούμε $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$, για όλα τα i.
3. Συνήθως, θέτουμε $\Phi(D_0) = 0$.
4. Όταν η διαφορά δυναμικού είναι *θετική* αποταμιεύουμε κόστος στην δομή.
5. Αντίθετα, όταν η διαφορά δυναμικού είναι *αρνητική* καταναλώνουμε αποταμιευμένο κόστος.

Ενεργειακή Μέθοδος: Στοίβα

Απόδειξη Πρότασης 1

Θεωρούμε την εξής συνάρτηση δυναμικού για τα στιγμιότυπα της στοίβας S,

$$\Phi(S_i) = |S_i|$$

Φυσικά, για κάθε στιγμιότυπο της στοίβας $S_i, \Phi(S_i) \geq \Phi(S_0) = |S_0| = 0$. Αφού θεωρούμε την στοίβα αρχικά κενή. Υπολογίζοντας τα λογιστικά κόστη που συνεπάγονται από το δυναμικό, καταλήγουμε, χωρίς εκπλήξεις, στο ίδιο αποτέλεσμα με τις άλλες αποδείξεις.

Ενεργειακή Μέθοδος: Δυαδικός Μετρητής

Απόδειξη Πρότασης 2

Έστω με B_i το πλήθος ενεργών δυαδικών ψηφίων στον μετρητή. Θεωρούμε την συνάρτηση δυναμικού $\Phi(D_i) = B_i$. Έστω, επίσης, T_i ο αριθμός επαναφορών (σε 0) στην i–οστή πράξη. Τότε η διαφορά δυναμικού $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ θα ισούται με το πλήθος των *νέων* ενεργών ψηφίων. Έτσι,

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (B_{i-1} - T_i + 1) - B_{i-1} = 1 - T_i$$

Όμως, το πραγματικό κόστος της $succ(\cdot)$ είναι, το πολύ $T_i + 1$, Έτσι,

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &\leq (T_i + 1) + (1 - T_i) = 2 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τα $\hat{c}_i$, παίρνουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Περιεχόμενα

Μία Αξιοσημείωτη Εφαρμογή: Δυναμικοί Πίνακες (1)

Μέσω της Αντισταθμιστικής Ανάλυσης μπορούμε να αναλύσουμε μία δομή δυναμικού πίνακα, στην οποία εκμεταλλευόμαστε την τυχαία προσπέλαση ενός πίνακα, αλλά και την προσαρμοστικότητά μιας λίστας.

1. Θεωρείστε έναν αρχικά κενό πίνακα, *σταθερού μεγέθους*.
2. Γεμίζουμε τον πίνακα, όσο υπάρχουν κενές θέσεις.
3. Όταν ο πίνακας γεμίσει, αντιγράφουμε όλα τα περιεχόμενά του, στις πρώτες θέσεις, ενός διπλάσιου, στο μέγεθος πίνακα.
4. Καταστρέφουμε τον παλιό πίνακα.

Μία Αξιοσημείωτη Εφαρμογή: Δυναμικοί Πίνακες (1)

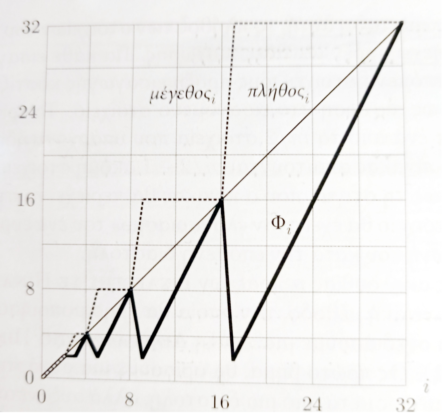
- Η Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης δίνει χρόνο $O(n^2)$, για n εισαγωγές.

- Η Αντισταθμιστική Ανάλυση, θα δώσει χρόνο $O(n)$, για n εισαγωγές.

- Η συνάρτηση δυναμικού που το επιτυγχάνει:

$$\Phi(\Pi) = 2 \cdot size(\Pi) - capacity(\Pi)$$

Μία Αξιοσημείωτη Εφαρμογή: Δυναμικοί Πίνακες (2)



Σχήμα: Το γράφημα της συνάρτηση δυναμικού
$\Phi(\Pi) = 2 \cdot size(\Pi) - capacity(\Pi)$

Βιβλιογραφία

Μια αναλυτικότερη παρουσίαση αυτών την Αντισταθμιστικής Ανάλυσης[1], θα βρείτε στο

(1) T. H. Cormen, C. E. Leiseron, R. L. Rivest and C. Stein, Introduction to Algorithms. MIT Press, 2001.

Στο άρθρο του Tarjan παρουσιάζονται πολλές εφαρμογές της Αντισταθμιστικής Ανάλυσης.

(2) R. E. Tarjan, Amortized Computational Complexity. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.

Στο παρακάτω βιβλίο γίνεται μια εκτεταμένη αναφορά σε δομές δεδομένων.

(3) Γ. Φ. Γεωργακόπουλος, Δομές Δεδομένων: έννοιες, τεχνικές και αλγόριθμοι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011.

[1] Δανειστήκαμε την μετάφραση του όρου Amortized Analysis, από την μετάφραση του (1) στα Ελληνικά, από τον Ι. Παπαδόγγονα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.

Τέλος

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!