Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι
(Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα)

Φίλιππος Μαυρόπουλος

ΑΛΜΑ

Ιανουάριος 2021

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

2 Κάλυμμα Συνόλου

3 Κάλυμμα Κορυφών

4 Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

5 Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Τι είναι οι Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Τι είναι οι Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Ορισμός

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται οι αποτελεσματικοί αλγόριθμοι που υπολογίζουν μία προσεγγιστική λύση ενός δύσκολου προβλήματος βελτιστοποίησης και για τους οποίους μπορούμε να αποδείξουμε πόσο απέχει η λύση τους από μία βέλτιστη.

Τι είναι οι Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Ορισμός

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται οι αποτελεσματικοί αλγόριθμοι που υπολογίζουν μία προσεγγιστική λύση ενός δύσκολου προβλήματος βελτιστοποίησης και για τους οποίους μπορούμε να αποδείξουμε πόσο απέχει η λύση τους από μία βέλτιστη.

Ο παραπάνω ορισμός δεν είναι αυστηρός. Εδώ, αποτελεσματικοί αλγόριθμοι εννοούνται οι πολυωνυμικοί αλγόριθμοι ενώ δύσκολα προβλήματα θεωρούνται τα $NP-$δύσκολα.

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$.

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P.

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα.

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

- Κάλυμμα Συνόλου

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

- Κάλυμμα Συνόλου
- Κάλυμμα Κορυφών

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

- Κάλυμμα Συνόλου
- Κάλυμμα Κορυφών
- Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

- Κάλυμμα Συνόλου
- Κάλυμμα Κορυφών
- Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών
- Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή

Γιατί Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$. Δηλαδή, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία ξέρουμε ότι ανήκουν στο NP αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκουν στο P. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα είναι δυσεπίλυτα, δηλαδή δεν γνωρίζουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που να επιλύουν σε ικανοποιητικό χρόνο μεγάλα στιγμιότυπα. Έτσι, θυσιάζουμε βελτιστότητα έναντι χρόνου.

Ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους είναι τα παρακάτω:

- Κάλυμμα Συνόλου
- Κάλυμμα Κορυφών
- Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών
- Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή

Λόγος Προσέγγισης

Λόγος Προσέγγισης

Ορισμός

Έστω P ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και I ένα στιγμιότυπο αυτού. Επιπλέον, έστω $A(I)$ το μέγεθος της λύσης που δίνει ο προσεγγιστικός αλγόριθμός A για το P και έστω $OPT(I)$ το μέγεθος της βέλτιστης λύσης για το στιγμιότυπο. Θα λέμε ότι ο αλγόριθμος A έχει λόγο προσέγγισης $a(n)$ αν $\frac{A(I)}{OPT(I)} \leq a(n)$ όταν το P είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή αν $\frac{OPT(I)}{A(I)} \leq a(n)$ όταν το P είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Λόγος Προσέγγισης

Ορισμός

Έστω P ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και I ένα στιγμιότυπο αυτού. Επιπλέον, έστω $A(I)$ το μέγεθος της λύσης που δίνει ο προσεγγιστικός αλγόριθμός A για το P και έστω $OPT(I)$ το μέγεθος της βέλτιστης λύσης για το στιγμιότυπο. Θα λέμε ότι ο αλγόριθμος A έχει λόγο προσέγγισης $a(n)$ αν $\frac{A(I)}{OPT(I)} \leq a(n)$ όταν το P είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή αν $\frac{OPT(I)}{A(I)} \leq a(n)$ όταν το P είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι ο λόγος προσέγγισης είναι μεγαλύτερος ή ίσος από 1. Ο λόγος προσέγγισης μπορεί να είναι είτε σταθερός αριθμός (π.χ. 2), είτε συνάρτηση (π.χ. $logn$).

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

2 Κάλυμμα Συνόλου

3 Κάλυμμα Κορυφών

4 Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

5 Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Κάλυμμα Συνόλου

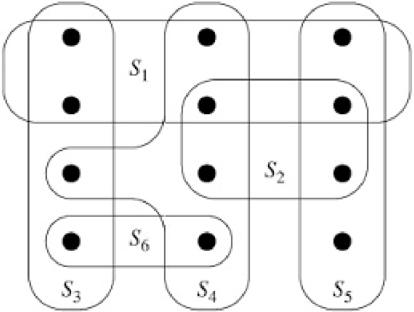
Κάλυμμα Συνόλου

Δεδομένα: Σύνολο S και οικογένεια (πιθανώς επικαλυπτόμενων) συνόλων $F = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ με στοιχεία από το S έτσι ώστε $\bigcup_{i \in [n]}(S_i) = S$

Ζητούμενο: Ελάχιστο σύνολο $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ έτσι ώστε $\bigcup_{i \in C}(S_i) = S$

Κάλυμμα Συνόλου

Δεδομένα: Σύνολο S και οικογένεια (πιθανώς επικαλυπτόμενων) συνόλων $F = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ με στοιχεία από το S έτσι ώστε $\bigcup_{i \in [n]}(S_i) = S$
Ζητούμενο: Ελάχιστο σύνολο $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ έτσι ώστε $\bigcup_{i \in C}(S_i) = S$



Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος.

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

$U \leftarrow S, C \leftarrow \emptyset$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

$U \leftarrow S, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

$U \leftarrow S, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  Pick i that maximizes $|S_i \cap U|$.

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

$U \leftarrow S, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  Pick i that maximizes $|S_i \cap U|$.
  $U \leftarrow (U \setminus S_i), C \leftarrow C \cup \{i\}$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

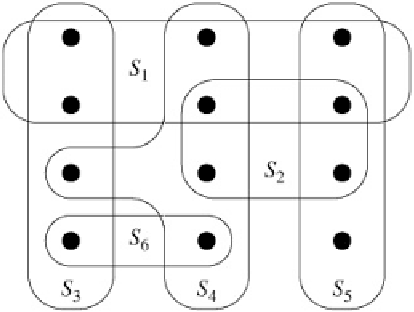
Για τον υπολογισμό μίας ελάχιστης λύσης απαιτείται (με τα μέχρι τώρα γνωστά) εκθετικός χρόνος. Μία απλή ιδέα που μπορεί να οδηγήσει σε άπληστο αλγόριθμο είναι επαναληπτικά να επιλέγουμε από την F το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία του S μέχρι να καλυφθούν όλα. Δηλαδή:

$U \leftarrow S, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  Pick i that maximizes $|S_i \cap U|$.
  $U \leftarrow (U \setminus S_i), C \leftarrow C \cup \{i\}$
end while

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου

Για το παρακάτω στιγμιότυπο, σχετικά εύκολα διαπιστώνουμε ότι μία βέλτιστη λύση είναι η $\{3, 4, 5\}$. Ο άπληστος αλγόριθμος που περιγράφηκε παραπάνω δίνει την λύση $\{1, 4, 5, 3\}$. Ο άπληστος αλγόριθμος δεν υπολογίζει βέλτιστη λύση. Μας ενδιαφέρει να βρούμε πόσο καλά προσεγγίζει μία βέλτιστη λύση όμως.



Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(\log n + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$*-προσεγγιστικός.*

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο. Από το Θεώρημα του Περιστερώνα ο αλγόριθμος στην k-οστή επανάληψη επιλέγει σύνολο με $|S_i| \geq \frac{|U_k|}{t}$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο. Από το Θεώρημα του Περιστερώνα ο αλγόριθμος στην k-οστή επανάληψη επιλέγει σύνολο με $|S_i| \geq \frac{|U_k|}{t}$. Άρα έχουμε ότι για κάθε k ισχύει $|U_{k+1}| \leq (1 - \frac{1}{t})|U_k|$ ή $|U_k| \leq (1 - \frac{1}{t})^k |U_0| = (1 - \frac{1}{t})^k n \leq e^{\frac{-k}{t}} n$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο. Από το Θεώρημα του Περιστερώνα ο αλγόριθμος στην k-οστή επανάληψη επιλέγει σύνολο με $|S_i| \geq \frac{|U_k|}{t}$. Άρα έχουμε ότι για κάθε k ισχύει $|U_{k+1}| \leq (1 - \frac{1}{t})|U_k|$ ή $|U_k| \leq (1 - \frac{1}{t})^k |U_0| = (1 - \frac{1}{t})^k n \leq e^{\frac{-k}{t}} n$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν για κάποιο k έχουμε $|U_k| < 1$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο. Από το Θεώρημα του Περιστερώνα ο αλγόριθμος στην k-οστή επανάληψη επιλέγει σύνολο με $|S_i| \geq \frac{|U_k|}{t}$. Άρα έχουμε ότι για κάθε k ισχύει $|U_{k+1}| \leq (1 - \frac{1}{t})|U_k|$ ή $|U_k| \leq (1 - \frac{1}{t})^k |U_0| = (1 - \frac{1}{t})^k n \leq e^{\frac{-k}{t}} n$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν για κάποιο k έχουμε $|U_k| < 1$. Άρα αν $\frac{k}{t} > logn$, τότε ο αλγόριθμος έχει τερματίσει σίγουρα. Επομένως $\frac{k}{t} \leq logn + 1$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Συνόλου

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω U_k τα ακάλυπτα στοιχεία μετά από k επαναλήψεις και έστω t το μέγεθος μίας βέλτιστης λύσης. Αφού το U καλύπτεται από λύση μεγέθους t, για κάθε U_k ισχύει το ίδιο. Από το Θεώρημα του Περιστερώνα ο αλγόριθμος στην k-οστή επανάληψη επιλέγει σύνολο με $|S_i| \geq \frac{|U_k|}{t}$. Άρα έχουμε ότι για κάθε k ισχύει $|U_{k+1}| \leq (1 - \frac{1}{t})|U_k|$ ή $|U_k| \leq (1 - \frac{1}{t})^k |U_0| = (1 - \frac{1}{t})^k n \leq e^{\frac{-k}{t}} n$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν για κάποιο k έχουμε $|U_k| < 1$. Άρα αν $\frac{k}{t} > logn$, τότε ο αλγόριθμος έχει τερματίσει σίγουρα. Επομένως $\frac{k}{t} \leq logn + 1$. Αφού το k ταυτίζεται με το μέγεθος της άπληστης λύσης, πράγματι ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Συνόλου είναι $(logn + 1)$-προσεγγιστικός. $\square$

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Κάλυμμα Συνόλου
3. Κάλυμμα Κορυφών
4. Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών
5. Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

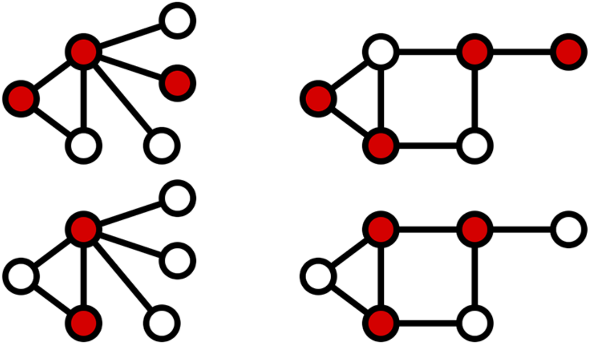
Κάλυμμα Κορυφών

Κάλυμμα Κορυφών

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$
Ζητούμενο: Ελάχιστο σύνολο $C \subseteq V$ έτσι ώστε για κάθε $(u, v) \in E$ είτε $u \in C$ είτε $v \in C$

Κάλυμμα Κορυφών

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$
Ζητούμενο: Ελάχιστο σύνολο $C \subseteq V$ έτσι ώστε για κάθε $(u, v) \in E$ είτε $u \in C$ είτε $v \in C$



Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

$U \leftarrow E, C \leftarrow \emptyset$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

$U \leftarrow E, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

$U \leftarrow E, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
    Select an edge $(u, v) \in E$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

$U \leftarrow E, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  Select an edge $(u, v) \in E$
  $U \leftarrow (U \setminus (u, v)), C \leftarrow C \cup \{u, v\}$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

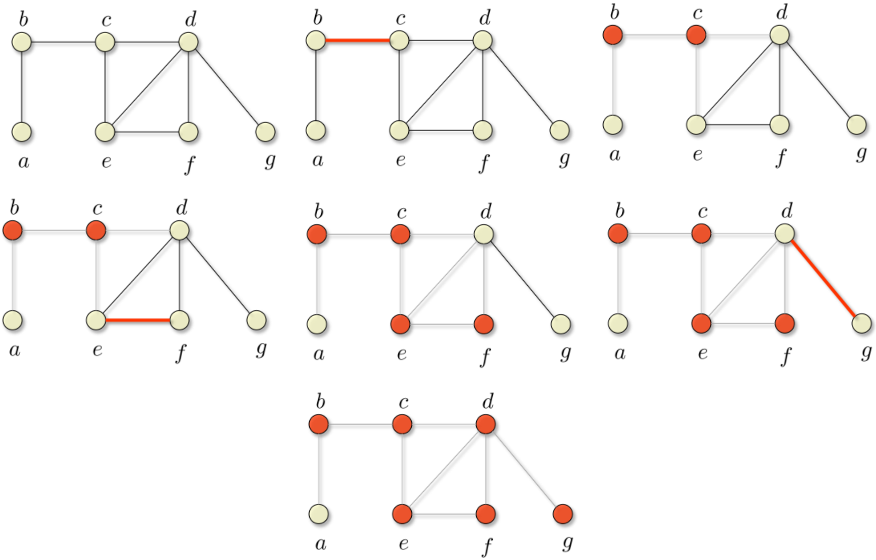
Μία ιδέα για άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Κάλυμμα Κορυφών είναι να χειριστούμε το πρόβλημα όπως το Κάλυμμα Συνόλου. Δηλαδή, επαναληπτικά να διαλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό και να διαγράφουμε όσες ακμές πρόσκεινται σε αυτή μέχρι το γράφημα να μείνει χωρίς ακμές. Με εντελώς παρόμοια λογική με την προηγούμενη, αυτός είναι ένας $(logn + 1)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Μία καλύτερη ιδέα είναι να επιλέγουμε αυθαίρετα ακάλυπτη ακμή, να προσθέτουμε στο κάλυμμα τα άκρα της και να διαγράφουμε τις προσκείμενες σε αυτές ακμές μέχρι να μην μείνει καμία ακμή στο γράφημα. Δηλαδή:

$U \leftarrow E, C \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  Select an edge $(u, v) \in E$
  $U \leftarrow (U \setminus (u, v)), C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
end while

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών

Άπληστος Αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών



Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω C η λύση που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο, C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα και A το σύνολο των ακμών που διαλέγει ο αλγόριθμος.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω C η λύση που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο, C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα και A το σύνολο των ακμών που διαλέγει ο αλγόριθμος. Είναι τετριμμένο ότι $2|A| = |C|$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω C η λύση που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο, C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα και A το σύνολο των ακμών που διαλέγει ο αλγόριθμος. Είναι τετριμμένο ότι $2|A| = |C|$. Το κάλυμμα C^* καλύπτει όλες τις ακμές του A. Οι ακμές του A δεν έχουν κοινές κορυφές. Άρα $|C^*| \geq |A|$.

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω C η λύση που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο, C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα και A το σύνολο των ακμών που διαλέγει ο αλγόριθμος. Είναι τετριμμένο ότι $2|A| = |C|$. Το κάλυμμα C^* καλύπτει όλες τις ακμές του A. Οι ακμές του A δεν έχουν κοινές κορυφές. Άρα $|C^*| \geq |A|$. Από τα παραπάνω, έχουμε ότι $\frac{|C|}{|C^*|} \leq 2$. □

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

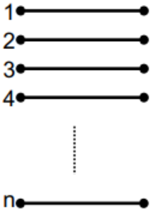
Έστω C η λύση που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο, C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα και A το σύνολο των ακμών που διαλέγει ο αλγόριθμος. Είναι τετριμμένο ότι $2|A| = |C|$. Το κάλυμμα C^* καλύπτει όλες τις ακμές του A. Οι ακμές του A δεν έχουν κοινές κορυφές. Άρα $|C^*| \geq |A|$. Από τα παραπάνω, έχουμε ότι $\frac{|C|}{|C^*|} \leq 2$. □

Αξίζει να αναφερθεί ότι το 2018 οι Dinur, Khot, Kindler, Minzer, Safra απέδειξαν ότι δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Κάλυμμα Κορυφών με λόγο προσέγγισης μικρότερο του $\sqrt{2}$, εκτός και αν $P = NP$!

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Λόγος Προσέγγισης για το Κάλυμμα Κορυφών

Ο λόγος προσέγγισης για τον παραπάνω αλγόριθμο είναι αυστηρός. Αν θεωρήσουμε ένα γράφημα όπου κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι ακριβώς δύο κορυφές συνδεδεμένες με ακμή, τότε το βέλτιστο κάλυμμα θα ήταν μία κορυφή από κάθε συνεκτική συνιστώσα, ενώ ο άπληστος αλγόριθμος θα επέλεγε και τις δύο κορυφές από κάθε συνιστώσα. Δηλαδή η προσεγγιστική λύση σε αυτή τη περίπτωση είναι ακριβώς διπλάσια από την βέλτιστη.



Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Κάλυμμα Συνόλου
3. Κάλυμμα Κορυφών
4. Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών
5. Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

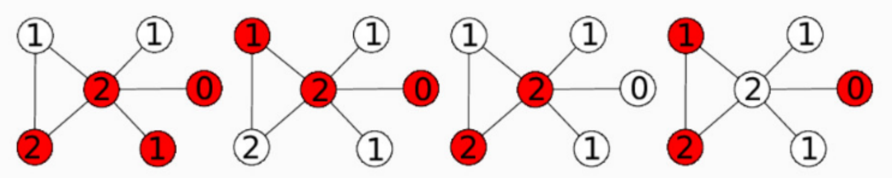
Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Σύνολο $C \subseteq V$ έτσι ώστε για κάθε $(u, v) \in E$ είτε $u \in C$ είτε $v \in C$ και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί το $\sum_{v \in C} w(v)$

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Σύνολο $C \subseteq V$ έτσι ώστε για κάθε $(u, v) \in E$ είτε $u \in C$ είτε $v \in C$ και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί το $\sum_{v \in C} w(v)$



Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών και Ισοδυναμίες

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών και Ισοδυναμίες

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού ισοδύναμα ώς εξής:

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών και Ισοδυναμίες

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού ισοδύναμα ώς εξής:

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Η ελαχιστοποίηση του $\sum_{v_i \in V} x_{v_i} w(v_i)$ υπό τον περιορισμό $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε $(v_i, v_j) \in E$ με $x_{v_i} \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών και Ισοδυναμίες

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού ισοδύναμα ώς εξής:

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Η ελαχιστοποίηση του $\sum_{v_i \in V} x_{v_i} w(v_i)$ υπό τον περιορισμό $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε $(v_i, v_j) \in E$ με $x_{v_i} \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$

Η επίλυση προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού είναι *NP*-δύσκολο πρόβλημα. Η μετατροπή δεν βοηθάει ιδιαίτερα. Θα χαλαρώσουμε λίγο τις απαιτήσεις του Ακέραιου προβλήματος, μετατρέποντάς το σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών και Ισοδυναμίες

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού ισοδύναμα ώς εξής:

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Η ελαχιστοποίηση του $\sum_{v_i \in V} x_{v_i} w(v_i)$ υπό τον περιορισμό $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε $(v_i, v_j) \in E$ με $x_{v_i} \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$

Η επίλυση προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού είναι *NP*-δύσκολο πρόβλημα. Η μετατροπή δεν βοηθάει ιδιαίτερα. Θα χαλαρώσουμε λίγο τις απαιτήσεις του Ακέραιου προβλήματος, μετατρέποντάς το σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βάρους $w : V \to \mathbb{R}$
Ζητούμενο: Η ελαχιστοποίηση του $\sum_{v_i \in V} x_{v_i} w(v_i)$ υπό τον περιορισμό $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε $(v_i, v_j) \in E$ με $x_{v_i} \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$.

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Solve the LP and obtain solution $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Solve the LP and obtain solution $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$
for $i = 1$ to n **do**

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Solve the LP and obtain solution $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$
for $i = 1$ to n **do**
  if $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ **then**

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Solve the LP and obtain solution $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$
for $i = 1$ to n **do**
  if $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ **then**
    $C \leftarrow C \cup \{v_i\}$

Άπληστος Αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Η απόπειρα περιγραφής του προβλήματος μέσω Γραμμικού Προγραμματισμού δεν είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, σε αντίθεση με την περιγραφή του μέσω Ακέραιου Προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, η λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο και μπορούν να προσφέρουν προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα του Σταθμισμένου Καλύμματος. Η ιδέα είναι αν $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$ μία λύση γραμμικού προβλήματος που προκύπτει από γράφημα G, τότε δημιουργούμε το κάλυμμα κορυφών $C = \{v_i | x_{v_i} \geq \frac{1}{2}\}$. Δηλαδή:

Solve the LP and obtain solution $(x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})$
for $i = 1$ to n **do**
  if $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ **then**
    $C \leftarrow C \cup \{v_i\}$
  end if
end for

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$. Άρα κάθε ακμή του G καλύπτεται από τουλάχιστον μία κορυφή στο C.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$. Άρα κάθε ακμή του G καλύπτεται από τουλάχιστον μία κορυφή στο C.

Έστω C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα. Τότε $W(C^*) \geq \sum_{v_i \in V} w(v_i) x_{v_i}$, αφού το Γραμμικό Πρόγραμμα που προκύπτει από το G είναι χαλάρωση του Ακέραιου.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$. Άρα κάθε ακμή του G καλύπτεται από τουλάχιστον μία κορυφή στο C.
Έστω C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα. Τότε $W(C^*) \geq \sum_{v_i \in V} w(v_i) x_{v_i}$, αφού το Γραμμικό Πρόγραμμα που προκύπτει από το G είναι χαλάρωση του Ακέραιου. Ταυτόχρονα, $\sum_{v_i \in V} w(v_i) x_{v_i} \geq \sum_{v_i \in C} w(v_i) x_{v_i}$ αφού $C \subseteq V$.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$. Άρα κάθε ακμή του G καλύπτεται από τουλάχιστον μία κορυφή στο C.
Έστω C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα. Τότε $W(C^*) \geq \sum_{v_i \in V} w(v_i) x_{v_i}$, αφού το Γραμμικό Πρόγραμμα που προκύπτει από το G είναι χαλάρωση του Ακέραιου. Ταυτόχρονα, $\sum_{v_i \in V} w(v_i) x_{v_i} \geq \sum_{v_i \in C} w(v_i) x_{v_i}$ αφού $C \subseteq V$. Κατόπιν, $\sum_{v_i \in C} w(v_i) x_{v_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{v_i \in C} w(v_i)$ αφού $x_v \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $v \in C$.

Λόγος Προσέγγισης για το Σταθμισμένο Κ. Κ.

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Καταρχάς, το σύνολο C που επιστρέφει ο άπληστος αλγόριθμος είναι κάλυμμα κορυφών αφού εφόσον $x_{v_i} + x_{v_j} \geq 1$ για κάθε ακμή $(v_i, v_j) \in E$, τότε είτε $x_{v_i} \geq \frac{1}{2}$ είτε $x_{v_j} \geq \frac{1}{2}$. Άρα κάθε ακμή του G καλύπτεται από τουλάχιστον μία κορυφή στο C.

Έστω C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα. Τότε $W(C^*) \geq \sum_{v_i \in V} w(v_i)x_{v_i}$, αφού το Γραμμικό Πρόγραμμα που προκύπτει από το G είναι χαλάρωση του Ακέραιου. Ταυτόχρονα, $\sum_{v_i \in V} w(v_i)x_{v_i} \geq \sum_{v_i \in C} w(v_i)x_{v_i}$ αφού $C \subseteq V$. Κατόπιν, $\sum_{v_i \in C} w(v_i)x_{v_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{v_i \in C} w(v_i)$ αφού $x_v \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $v \in C$. Τελικά, έχουμε $W(C^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{v_i \in C} w(v_i) = \frac{1}{2} W(C)$ και έτσι $\frac{W(C)}{W(C^*)} \leq 2$. $\square$

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Κάλυμμα Συνόλου
3. Κάλυμμα Κορυφών
4. Σταθμισμένο Κάλυμμα Κορυφών
5. Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

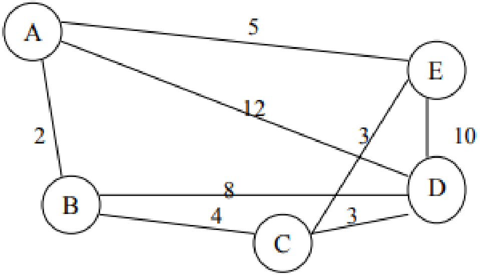
Δεδομένα: Πλήρες γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση αποστάσεων $d : V^2 \to \mathbb{R}$

Ζητούμενο: Περιοδεία ελάχιστου μήκους που να επισκέπτεται όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Δεδομένα: Πλήρες γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση αποστάσεων $d : V^2 \to \mathbb{R}$

Ζητούμενο: Περιοδεία ελάχιστου μήκους που να επισκέπτεται όλες τις κορυφές του γραφήματος.



Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι NP-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$.

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι NP-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό NP-δύσκολο πρόβλημα.

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι *NP*-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό *NP*-δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θεωρούμε ότι η συνάρτηση αποστάσεων, d, είναι μετρική. Δηλαδή:

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι *NP*-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει *c*-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό *c*, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό *NP*-δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θεωρούμε ότι η συνάρτηση αποστάσεων, *d*, είναι μετρική. Δηλαδή:

1. $d(v_i, v_j) \geq 0$ για κάθε $v_i, v_j \in V$

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι *NP*-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό *NP*-δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θεωρούμε ότι η συνάρτηση αποστάσεων, d, είναι μετρική. Δηλαδή:

1. $d(v_i, v_j) \geq 0$ για κάθε $v_i, v_j \in V$
2. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ για κάθε $v_i, v_j \in V$

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι NP-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό NP-δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θεωρούμε ότι η συνάρτηση αποστάσεων, d, είναι μετρική. Δηλαδή:

1. $d(v_i, v_j) \geq 0$ για κάθε $v_i, v_j \in V$
2. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ για κάθε $v_i, v_j \in V$
3. $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)$ για κάθε $v_i, v_j, v_k \in V$

Πρόβλημα Πλανόδιας Πωλήτριας

Το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι NP-δύσκολο. Στην γενικότερη μορφή του, δεν υπάρχει c-προσεγγιστικός πολυωνυμικός αλγόριθμος που να το προσεγγίζει για κανένα σταθερό αριθμό c, εκτός αν $P = NP$. Ο λόγος είναι ότι, ελλείψει τριγωνικής ανισότητας, στιγμιότυπα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα Χαμιλτονιανός Κύκλος, ένα γνωστό NP-δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θεωρούμε ότι η συνάρτηση αποστάσεων, d, είναι μετρική. Δηλαδή:

1. $d(v_i, v_j) \geq 0$ για κάθε $v_i, v_j \in V$
2. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ για κάθε $v_i, v_j \in V$
3. $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)$ για κάθε $v_i, v_j, v_k \in V$

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους.

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου.

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Root G arbitrarily

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Do DFS on T and get an order P

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Do DFS on T and get an order P
Delete a vertex from P if it has been discovered earlier

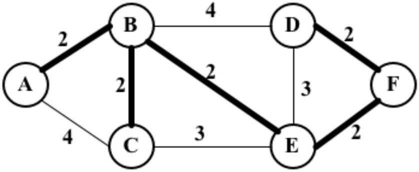
Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Η ιδέα δεν είναι τόσο προφανής όσο σε άλλους προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Ένα άλλο πρόβλημα το ζητούμενο του οποίου αφορά όλες τις κορυφές ενός γραφήματος είναι το πρόβλημα του Ελάχιστου Γεννητικού Δέντρου. Σε γραφήματα χωρίς κύκλους αρνητικού μήκους, η εύρεση ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι εφικτή σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του Prim. Αξιοποιώντας αυτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή ως εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Do DFS on T and get an order P
Delete a vertex from P if it has been discovered earlier
Return the remaining vertices of P in the original order

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος για το Π. Π. Π.



Αρχικός περίπατος από DFS: $\{B, A, B, C, B, E, F, D, B\}$

Περίπατος μετά τις διαγραφές: $\{B, A, C, E, F, D, B\}$

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού.

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού. Τότε $C(T) \leq C(H)$ (διαφορετικά θα προέκυπτε από τον περίπατο γεννητικό δέντρου μικρότερου κόστους).

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού. Τότε $C(T) \leq C(H)$ (διαφορετικά θα προέκυπτε από τον περίπατο γεννητικό δέντρου μικρότερου κόστους). Αν επιτρέπαμε την επανεπιλογή ακμών, με DFS στο T θα παίρναμε έναν περίπατο T' κόστους $C(T') = 2C(T)$ καθώς ο DFS επισκέπτεται κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές.

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού. Τότε $C(T) \leq C(H)$ (διαφορετικά θα προέκυπτε από τον περίπατο γεννητικό δέντρου μικρότερου κόστους). Αν επιτρέπαμε την επανεπιλογή ακμών, με DFS στο T θα παίρναμε έναν περίπατο T' κόστους $C(T') = 2C(T)$ καθώς ο DFS επισκέπτεται κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές. Εφόσον το γράφημα της εισόδου είναι πλήρες, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν έγκυρο περίπατο που επισκέπτεται τις κορυφές με τη σειρά του DFS στο T αλλά κάθε φορά που φτάνει σε φύλλο, να μεταβαίνει στην αμέσως επόμενη κορυφή που θα ανακάλυπτε.

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού. Τότε $C(T) \leq C(H)$ (διαφορετικά θα προέκυπτε από τον περίπατο γεννητικό δέντρου μικρότερου κόστους). Αν επιτρέπαμε την επανεπιλογή ακμών, με DFS στο T θα παίρναμε έναν περίπατο T' κόστους $C(T') = 2C(T)$ καθώς ο DFS επισκέπτεται κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές. Εφόσον το γράφημα της εισόδου είναι πλήρες, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν έγκυρο περίπατο που επισκέπτεται τις κορυφές με τη σειρά του DFS στο T αλλά κάθε φορά που φτάνει σε φύλλο, να μεταβαίνει στην αμέσως επόμενη κορυφή που θα ανακάλυπτε. Έστω P ο νέος περίπατος.

Λόγος Προσέγγισης για το Π. Π. Π

Ισχυρισμός

Ο άπληστος αλγόριθμος για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας είναι 2-προσεγγιστικός.

Απόδειξη.

Έστω H ένας περίπατος σε γράφημα G και T ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο αυτού. Τότε $C(T) \leq C(H)$ (διαφορετικά θα προέκυπτε από τον περίπατο γεννητικό δέντρου μικρότερου κόστους). Αν επιτρέπαμε την επανεπιλογή ακμών, με DFS στο T θα παίρναμε έναν περίπατο T' κόστους $C(T') = 2C(T)$ καθώς ο DFS επισκέπτεται κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές. Εφόσον το γράφημα της εισόδου είναι πλήρες, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν έγκυρο περίπατο που επισκέπτεται τις κορυφές με τη σειρά του DFS στο T αλλά κάθε φορά που φτάνει σε φύλλο, να μεταβαίνει στην αμέσως επόμενη κορυφή που θα ανακάλυπτε. Έστω P ο νέος περίπατος. Τότε $C(P) \leq (C(T') = 2C(T) \leq C(H^*)$, όπου H^* είναι βέλτιστη περιοδεία. Επομένως, $\frac{C(P)}{C(H^*)} \leq 2$. □

Καλύτερη Προσέγγιση

Καλύτερη Προσέγγιση

Το 1976 οι Christofides και Serdyukov, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, κατάφεραν να βρουν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας αξιοποιώντας τα Euler-ιανά γραφήματα.

Καλύτερη Προσέγγιση

Το 1976 οι Christofides και Serdyukov, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, κατάφεραν να βρουν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας αξιοποιώντας τα Euler-ιανά γραφήματα. Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα είναι Euler-ιανό αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.

Καλύτερη Προσέγγιση

Το 1976 οι Christofides και Serdyukov, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, κατάφεραν να βρουν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας αξιοποιώντας τα Euler-ιανά γραφήματα. Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα είναι Euler-ιανό αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Έτσι, πατώντας στον υπάρχοντα αλγόριθμο, εισήγαγαν στο ελάχιστο γεννητικό δέντρο ακμές μεταξύ των κορυφών περιττού βαθμού, δημιουργώντας ένα ελάχιστου κόστους ταίριασμα μεταξύ αυτών. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό επειδή το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε ένα γράφημα είναι άρτιο.

Καλύτερη Προσέγγιση

Το 1976 οι Christofides και Serdyukov, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, κατάφεραν να βρουν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Πρόβλημα της Πλανόδιας Πωλήτριας αξιοποιώντας τα Euler-ιανά γραφήματα. Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα είναι Euler-ιανό αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Έτσι, πατώντας στον υπάρχοντα αλγόριθμο, εισήγαγαν στο ελάχιστο γεννητικό δέντρο ακμές μεταξύ των κορυφών περιττού βαθμού, δημιουργώντας ένα ελάχιστου κόστους ταίριασμα μεταξύ αυτών. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό επειδή το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε ένα γράφημα είναι άρτιο. Διαισθητικά, αυτό βοηθάει επειδή πλέον είναι εφικτή η μεταβίβαση από ένα υποδέντρο του ελάχιστου γεννητικού δέντρου σε άλλο πιθανώς αγνοώντας κάποιο πρόγονο της ρίζας του.

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily

Find MST T for G, rooted by r

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily

Find MST T for G, rooted by r

Find the set of odd degree vertices, S

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Find the set of odd degree vertices, S
Find a perfect matching of S

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Find the set of odd degree vertices, S
Find a perfect matching of S
Find an Eulerian circuit on the multigraph $G = (V(T), E(T) \cup E(S))$, P

Ο αλγόριθμος Christofides και Serdyukov

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Find the set of odd degree vertices, S
Find a perfect matching of S
Find an Eulerian circuit on the multigraph $G = (V(T), E(T) \cup E(S))$, P
Delete repeated vertices of P

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος είναι ο εξής:

Root G arbitrarily
Find MST T for G, rooted by r
Find the set of odd degree vertices, S
Find a perfect matching of S
Find an Eulerian circuit on the multigraph $G = (V(T), E(T) \cup E(S))$, P
Delete repeated vertices of P
Return P without the repeated vertices.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$. Ας θεωρήσουμε ότι H_S^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές του S πάνω στις αρχικές ακμές.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$. Ας θεωρήσουμε ότι H_S^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές του S πάνω στις αρχικές ακμές. Το υπογράφημα S είναι ένα τέλειο ταίριασμα. Άρα περιέχει τις μισές ακμές σε σχέση με την περιοδεία H_S^* και εφόσον το S είναι ταίριασμα ελάχιστου κόστους, ισχύει ότι $C(S) \leq \frac{1}{2}C(H_S^*)$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$. Ας θεωρήσουμε ότι H_S^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές του S πάνω στις αρχικές ακμές. Το υπογράφημα S είναι ένα τέλειο ταίριασμα. Άρα περιέχει τις μισές ακμές σε σχέση με την περιοδεία H_S^* και εφόσον το S είναι ταίριασμα ελάχιστου κόστους, ισχύει ότι $C(S) \leq \frac{1}{2}C(H_S^*)$. Είναι προφανές ότι $C(H_S^*) \leq C(H^*)$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$. Ας θεωρήσουμε ότι H_S^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές του S πάνω στις αρχικές ακμές. Το υπογράφημα S είναι ένα τέλειο ταίριασμα. Άρα περιέχει τις μισές ακμές σε σχέση με την περιοδεία H_S^* και εφόσον το S είναι ταίριασμα ελάχιστου κόστους, ισχύει ότι $C(S) \leq \frac{1}{2}C(H_S^*)$. Είναι προφανές ότι $C(H_S^*) \leq C(H^*)$. Αν συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω, έχουμε $C(P) \leq C(T) + C(S) \leq C(H^*) + \frac{1}{2}C(H^*) = \frac{3}{2}C(H^*)$. Επομένως, $\frac{C(P)}{C(H^*)} \leq \frac{3}{2}$.

Λόγος Προσέγγισης του Βελτιωμένου Αλγόριθμου

Ισχυρισμός

Ο αλγόριθμος Christofides-Serdyukov έχει λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2}$.

Απόδειξη.

Αρχικά, διαπιστώνουμε εύκολα ότι $C(P) \leq C(T) + C(S)$, αφού $E(P) \subseteq E(T) \cup E(S)$. Αν H^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία, είδαμε ότι $C(T) \leq C(H^*)$. Ας θεωρήσουμε ότι H_S^* είναι μία βέλτιστη περιοδεία που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές του S πάνω στις αρχικές ακμές. Το υπογράφημα S είναι ένα τέλειο ταίριασμα. Άρα περιέχει τις μισές ακμές σε σχέση με την περιοδεία H_S^* και εφόσον το S είναι ταίριασμα ελάχιστου κόστους, ισχύει ότι $C(S) \leq \frac{1}{2}C(H_S^*)$. Είναι προφανές ότι $C(H_S^*) \leq C(H^*)$. Αν συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω, έχουμε $C(P) \leq C(T) + C(S) \leq C(H^*) + \frac{1}{2}C(H^*) = \frac{3}{2}C(H^*)$. Επομένως, $\frac{C(P)}{C(H^*)} \leq \frac{3}{2}$. $\square$

Ακόμη Καλύτερη Προσέγγιση

Ακόμη Καλύτερη Προσέγγιση

Τον Σεπτέμβριο του 2020, οι Anna R. Karlin, Nathan Klein, Shayan Oveis Gharan κατάφεραν να βρουν τυχαιοποιημένο αλγόριθμο που προσεγγίζει το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή με λόγο προσέγγισης $\frac{3}{2} - \epsilon$ για κάποιο $\epsilon > 10^{-36}$. Η λειτουργία του αλγορίθμου είναι παρόμοια με αυτή του προαναφερθέντα αλγόριθμου και κυρίως διαφέρει στον τρόπο που επιλέγει το ελάχιστο γεννητικό δέντρο σε σχέση με αυτόν.

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!