MATROIDS AND THE GREEDY ALGORITHM

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Νικόλαος Χ. Πούλιος

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΔΠΜΣ Αλγόριθμοι Λογική και Διακριτά Μαθηματικά

14 Ιανουαρίου 2021

Definition

Είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $M = (S, I)$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. S είναι ένα πεπερασμένο, μη κενό σύνολο.
2. I είναι μια μή κενή οικογένεια υποσυνόλων του S, αποκαλούμενα ως ανεξάρτητα υποσύνολα του S, τέτοια ώστε αν $B \in I$ και $A \subseteq B$, τότε $A \in I$ (λέγοντας έτσι ότι το I είναι hereditary-κληρονομική) και σημειώνοντας ότι $\emptyset \in I$.
3. Εάν $A \in I$, $B \in I$ και $|A| < |B|$ τότε $\exists$ κάποιο $x \in B - A$ τέτοιο ώστε $A \cup \{x\} \in I$ (exchange property-ιδιότητα της ανταλλαγής) του M.

Μητροειδή γράφων

Definition

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$ ένα μητροειδές γράφημα ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος: $M(G) = (S_G, I_G)$. Το S_G είναι το E, δηλαδή το σύνολο των ακμών του γράφου.
Αν A ένα υποσύνολο του E, τότε $A \in I$ αν και μόνο αν το A είναι ακυκλικό. Δηλαδή ένα υποσύνολο των ακμών του γράφου είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν σχηματίζει ένα δάσος. Το μητροειδές γράφημα σχετίζεται αρκετά με το minimum spanning tree πρόβλημα.

Μητροειδή γράφων συνέχεια

Theorem

Αν G είναι ένας μη κατευθυνόμενος γράφος, τότε το $M_G = (S_G, I_G)$ είναι ένα Μητροειδές (Matroid).

Απόδειξη

1. S_G: πεπερασμένο μη κενό σύνολο αφού $S_G = E$
2. I_G: κληρονομικό επειδή κάθε υποσύνολο ενός δάσους είναι δάσος.
3. ιδιότητα της ανταλλαγής. Έστω ότι A, B είναι δάση (ακυκλικά σύνολα ακμών του G) με $|A| < |B|$. Τότε το δάσος A περιλαμβάνει $|V| - |A|$ δέντρα και το δάσος B περιλαμβάνει $|V| - |B|$ δέντρα που είναι λιγότερα από τα δέντρα του δάσους A.

Συνέχεια απόδειξης

Συνεπώς το δάσος B θα πρέπει να περιλαμβάνει κάποιο δέντρο T του οποίου οι κορυφές είναι σε δύο διαφορετικά δέντρα του δάσους A. Όμως επειδή το T είναι συνδεδεμένο , θα έχει μια ακμή (u, v) έτσι ώστε οι κορυφές u και v να βρίσκονται σε διαφορετικά δέντρα του δάσους A. Συνεπώς η ακμή (u, v) μπορεί να προστεθεί στο A καθώς συνδέει 2 κορυφές σε δύο διαφορετικά δέντρα του A.
Συνεπώς το M_G είναι Matroid. **ο.ε.δ.**

Definition

Έστω $M = (S, I)$ μητροειδές και $A \in I$. Ένα στοιχείο x που δεν ανήκει στο A καλείται επέκταση του A αν $A \cup \{x\} \in I$, δηλαδή αν μπορεί να προστεθεί στο A διατηρώντας την ανεξαρτησία.

A:Μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο του Matroid M

Definition

Το A καλείται μέγιστο όταν δεν μπορεί να δεχτεί επεκτάσεις. Δηλαδή δεν περιλαμβάνεται μέσα σε μεγαλύτερο ανεξάρτητο υποσύνολο του Matroid M.

Definition

Ένα ανεξάρτητο υποσύνολο A σε ένα μητροειδές M δεν έχει καμία επέκταση, ονομάζεται μείζον. Διαφορετικά το A είναι μείζον αν δεν περιέχεται σε κανένα μεγαλύτερο ανεξάρτητο υποσύνολο του M.

Μητροειδή - μέγιστα ανεξάρτητα υποσύνολα

Theorem

Όλα τα μέγιστα ανεξάρτητα υποσύνολα σε ένα Matroid έχουν το ίδιο μέγεθος.

Proof.

Έστω ότι το A είναι μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο σε ένα Matroid M και έστω ότι $\exists B$ ανεξάρτητο υποσύνολο του M επίσης μέγιστο με $|A| < |B|$. Τότε από exchange property του $M \exists$ κάποιο $x \in B - A$ τέτοιο ώστε $A \cup \{x\} \in I$. Άτοπο διότι το A είναι μέγιστο. ∎

Σταθμισμένα Μητροειδή

Definition

'Ενα Μητροειδή $M = (S, I)$ καλείται σταθμισμένο όταν υπάρχει μια συνάρτηση w η οποία επιστρέφει θετικά βάρη $w(x)$ σε κάθε στοιχείο $x \in S$. Για $A \subseteq S$ έχουμε την επέκταση:

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$$

Δοθέντος ενός σταθμισμένου Matroid $M = (S, I)$, ένα ανεξάρτητο υποσύνολο $A \in I$ καλείται βέλτιστο όταν μεγιστοποιείται η συνάρτηση βάρους $w(A)$.

Definition

Θεωρούμε M_G να είναι ένα μητροειδές γράφου ενός συνδεόμενου, μη κατευθυνόμενου γράφου G. Τότε κάθε μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο του M_G πρέπει να είναι δέντρο με ακριβώς $|v| - 1$ ακμές που συνδέουν όλες τις κορυφές του G.'Ενα τέτοιο δέντρο καλείται συνδετικό.

Το πρόβλημα του ελάχιστου συνδετικού δέντρου, ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης του βέλτιστου υποσυνόλου σε ένα σταθμισμένο Graphic Matroid.

Άπληστοι αλγόριθμοι

- Αρκετά προβλήματα για τα οποία μια άπληστη προσέγγιση παρέχει βέλτιστη λύση μπορεί να σχεδιαστεί για την εύρεση ενός σταθμισμένου-μεγίστου ανεξάρτητου υποσυνόλου σε ένα σταθμισμένο μητροειδές.

Άπληστοι αλγόριθμοι

- Αρκετά προβλήματα για τα οποία μια άπληστη προσέγγιση παρέχει βέλτιστη λύση μπορεί να σχεδιαστεί για την εύρεση ενός σταθμισμένου-μεγίστου ανεξάρτητου υποσυνόλου σε ένα σταθμισμένο μητροειδές.
- Διαφορετικά δοθέντος ενός σταθμισμένου μητροηδές $M = (S, I)$ προσπαθούμε να βρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο $A \in I$ τ.ω. $w(A)$ να είναι μέγιστο.

Άπληστοι αλγόριθμοι

- Αρκετά προβλήματα για τα οποία μια άπληστη προσέγγιση παρέχει βέλτιστη λύση μπορεί να σχεδιαστεί για την εύρεση ενός σταθμισμένου-μεγίστου ανεξάρτητου υποσυνόλου σε ένα σταθμισμένο μητροειδές.
- Διαφορετικά δοθέντος ενός σταθμισμένου μητροηδές $M = (S, I)$ προσπαθούμε να βρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο $A \in I$ τ.ω. $w(A)$ να είναι μέγιστο.
- Θα καλούμε ένα υποσύνολο ως βέλτιστο υποσύνολο του *matroid* εκείνο το οποίο είναι ανεξάρτητο και έχει το μέγιστο πιθανό στάθμισμα.

Άπληστοι αλγόριθμοι συνέχεια

- Ταξινομεί τα κομμάτια του input με βάση κάποιο κριτήριο, διαβάζει τα ταξινομημένα κομμάτια και για κάθε κομματάκι που διαβάζει κάνει μια αμετάκλητη επιλογή.

Άπληστοι αλγόριθμοι συνέχεια

- Ταξινομεί τα κομμάτια του input με βάση κάποιο κριτήριο, διαβάζει τα ταξινομημένα κομμάτια και για κάθε κομματάκι που διαβάζει κάνει μια αμετάκλητη επιλογή.
- Λέγοντας αμετάκλητη, σημαίνει ότι με βάση κάποιο κριτήριο γίνεται η επιλογή για τη λύση, για το αν δηλαδή θα συμπεριληφθεί ένα κομμάτι στη λύση ή όχι χωρίς να γίνει αλλαγή στο μέλλον.

Άπληστοι αλγόριθμοι βήματα

1. Ταξινομεί τις βασικές συνιστώσες του στιγμιότυπου εισόδου με βάση κάποιο κριτήριο.

Άπληστοι αλγόριθμοι βήματα

1. Ταξινομεί τις βασικές συνιστώσες του στιγμιότυπου εισόδου με βάση κάποιο κριτήριο.
2. Επιλέγει αμετάκλητα αν θα συμπεριλάβει, με βάση το κριτήριο επιλογής, βασική συνιστώσα στη λύση.

Άπληστοι αλγόριθμοι βήματα

1. Ταξινομεί τις βασικές συνιστώσες του στιγμιότυπου εισόδου με βάση κάποιο κριτήριο.
2. Επιλέγει αμετάκλητα αν θα συμπεριλάβει, με βάση το κριτήριο επιλογής, βασική συνιστώσα στη λύση.
3. Εφαρμόζει τον εαυτό του στο υπο-στιγμιότυπο που προκύπτει με βάση την ανωτέρω επιλογή.

Με βάση τα παραπάνω ένα άπληστος αλγόριθμος χαρακτηρίζεται από:

- Το κριτήριο ταξινόμησης των συνιστωσών.

Άπληστοι αλγόριθμοι βήματα

1. Ταξινομεί τις βασικές συνιστώσες του στιγμιότυπου εισόδου με βάση κάποιο κριτήριο.
2. Επιλέγει αμετάκλητα αν θα συμπεριλάβει, με βάση το κριτήριο επιλογής, βασική συνιστώσα στη λύση.
3. Εφαρμόζει τον εαυτό του στο υπο-στιγμιότυπο που προκύπτει με βάση την ανωτέρω επιλογή.

Με βάση τα παραπάνω ένα άπληστος αλγόριθμος χαρακτηρίζεται από:

- Το κριτήριο ταξινόμησης των συνιστωσών.
- Το κριτήριο επιλογής της βέλτιστης συνιστώσας στη λύση.

Πλεονεκτήματα

- Γρήγοροι, μιας και κάνει μόνο ταξινόμηση
- Απλό κριτήριο επιλογής π.χ. με βάση το ύψος των κατοίκων
- Εφαρμογή σε πολλά και σημαντικά προγράμματα με μεγάλη επιτυχία
- Εύκολοι στο σχεδιασμό
- Αποδοτικοί από πλευρά διαχείρισης πόρων, π.χ. χρόνος εκτέλεσης

Μειονεκτήματα

- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εξ αρχής αν ο αλγόριθμός μας βρίσκει την βέλτιστη λύση! Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό κάνουμε χρήση της απόδειξης ορθότητας.

Πλεονεκτήματα

- Γρήγοροι, μιας και κάνει μόνο ταξινόμηση
- Απλό κριτήριο επιλογής π.χ. με βάση το ύψος των κατοίκων
- Εφαρμογή σε πολλά και σημαντικά προγράμματα με μεγάλη επιτυχία
- Εύκολοι στο σχεδιασμό
- Αποδοτικοί από πλευρά διαχείρισης πόρων, π.χ. χρόνος εκτέλεσης

Μειονεκτήματα

- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εξ αρχής αν ο αλγόριθμός μας βρίσκει την βέλτιστη λύση! Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό κάνουμε χρήση της απόδειξης ορθότητας.
- Η εφαρμογή του στο υπο-στιγμιότυπο δεν είναι αναδρομική μιας και σε κάθε βήμα έχουμε περιορισμό και όχι διαίρεση του στιγμιότυπου. Γι' αυτό διατυπώνονται επαναληπτικά και δεν είναι αναδρομικοί αλγόριθμοι.

Άπληστοι αλγόριθμοι – Στρατηγική

- Ταξινόμηση συνιστωσών με βάση κάποιο απλό κριτήριο
- Επιλέγει αυτό που δείχνει καλύτερο με βάση την τρέχουσα κατάσταση και λύνει το υπο-στιγμιότυπο που προκύπτει από αυτή την επιλογή. Με άλλα λόγια βρίσκει τοπικά βέλτιστη επιλογή με την προοπτική ότι θα οδηγηθούμε σε βέλτιστη συνολική λύση. Η ίδια στρατηγική ακολουθείται και για τα υποπροβλήματα που προκύπτουν για:
- Μη-προσαρμοστικούς αλγορίθμους: ίδια ταξινόμηση για όλα τα βήματα
- Προσαρμοστικός: διαφοροποιείται η ταξινόμηση από βήμα σε βήμα

Άπληστοι αλγόριθμοι σε σταθμισμένο Μητροειδή

- Αρκετά προβλήματα για τα οποία μια άπληστη προσέγγιση παρέχει βέλτιστη λύση μπορεί να σχεδιαστεί για την εύρεση ενός σταθμισμένου-μεγίστου ανεξάρτητου υποσυνόλου σε ένα σταθμισμένο μητροειδή.
- Διαφορετικά δοθέντος ενός σταθμισμένου μητροειδούς $M = (S, I)$ προσπαθούμε να βρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο $A \in I$ τ.ω. $w(A)$ να είναι μέγιστο.
- Θα καλούμε ένα υποσύνολο ως βέλτιστο υποσύνολο του μητροειδούς εκείνο το οποίο είναι ανεξάρτητο και έχει το μέγιστο πιθανό στάθμισμα

Άπληστοι αλγόριθμοι σε σταθμισένο Μητροειδή

Στην περίπτωση του *MST* έχουμε ένα συνδεδεμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και μια συν/ση τ.ω. $w(e)$ είναι θετικό βάρος της ακμής e.
Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εύρεση ενός υποσυνόλου των πλευρών τα οποία συνδέουν όλες τις κορυφές μαζί και έχουν το ελάχιστο συνολικό μήκος. Για να το αναγάγουμε αυτό σε πρόβλημα έυρεσης ενός βέλτιστου υποσυνόλου ενός μητροιειδοές θεωρούμε τα παρακάτω:

- M_G: σταθμισμένο μητροιειδή με συν/ση στάθμισης w', όπου $w'(e) = \omega_0 - \omega_e$
- w_0: μεγαλύτερη από το μέγιστο μήκος οποιασδήποτε πλευράς

Στο μητροηδές όλα αυτά τα βάρη είναι θετικά και ένα βέλτιστο υποσύνολο θα είναι MST του ελαχίστου μήκους στο γράφημα. Πιο συγκεκριμένα κάθε μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο A αντιστοιχεί σε ένα συνδετικό δέντρο και έχουμε $w'(A) = (|V| - 1)\omega_0 - w(A)$, το ανεξάρτητο υποσύνολο που μεγιστοποιεί το $w'(A)$ θα πρέπει να ελαχιστοποιεί το $w(A)$. Συμπέρασμα: Κάθε αλγόριθμος που μπορεί να βρει ένα βέλτιστο υποσύνολο A σε ένα τυχαίο μητροηδές μπορεί να λύσει το MST πρόβλημα.

Άπληστοι αλγόριθμοι σε σταθμισένο Μητροειδές συνέχεια

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα σταθμισμένο μητροειδές $M = (S, I)$ με μια συσχετισμένη συν/ση βάρους w και επιστρέφει ένα βέλτιστο υποσύνολο A.

- $S[M]$: οι συνιστώσες του M
- $I[M]$: σταθμισμένη συν/ση της w

```
GREEDY(M, w)
A ← ∅
sort S[M] into nonincreasing order by weight w
for each x ∈ S[M], taken in nonincreasing order by weight w(x)
    do if A ∪ {x} ∈ I[M]
        then A ← A ∪ {x}
return A
```

Ο αλγόριθμος είναι άπληστος (greedy) γιατί θεωρεί κάθε στοιχείο $x \in S$ και το προσθέτει αμέσως στο σύνολο A με το σκεπτικό ότι αν ισχύει το $A \cup x$ είναι ανεξάρτητα. Τα στοιχεία του συνόλου S είναι ταξινομημένα σε μή αύξουσα σειρά βαρών και αν το x στοιχείο θεωρείται ότι πρέπει να προστεθεί στο A, παραμένοντας ανεξάρτητο μετά τη προσθήκη του x σε αυτό, τότε το προσθέτει διαφορετικά το απορρίπτει.
Ο άπληστος αλγόριθμος πάντα επιστρέφει ένα ανεξάρτητο υποσύνολο του A μιας και το κενό σύνολο είναι ανεξάρτητο από τον ορισμό του μητροειδούς και λαμβάνοντας υπόψη ότι το x θα προστεθεί στο A αν ισχύει ότι $A \cup x$ είναι ανεξάρτητο, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.
Επομένως το υποσύνολο A είναι ένα βέλτιστο υποσύνολο.

Μητροηδή και η ιδιότητα της άπλησης επιλογής

Lemma (1)

Έστω $M = (S, I)$ σταθμισμένο μητροειδές με συν/ση βάρους w και S ταξινομείται σε μη αύξουσα σειρά με βάση τα βάρη. Έστω x να είναι το πρώτο στοιχείο του S τ.ω. x να είναι ανεξάρτητο (αν υπάρχει τέτοιο x). Αν υπάρχει x τότε υπάρχει και βέλτιστο υποσύνολο A του S που περιέχει το x.

Lemma (2)

Έστω $M = (S, I)$ ένα μητροειδές. Αν το x είναι ένα στοιχείο του S τ.ω. το x να μην είναι μια επέκταση του $\emptyset$ τότε το x δεν θα είναι επέκταση για κανένα ανεξάρτητο υποσύνολο A του S. Το λήμμα 2, μας λέει ότι αν κάποιο στοιχείο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αμέσως, δε θα χρησιμοποιηθεί ποτέ. Επομένως ο άπληστος αλγόριθμος δεν μπορεί να κάνει λάθος προσπελάζοντας κάθε αρχικό στοιχείο του S το οποίο να μην είναι επέκταση του $\emptyset$.

Lemma (3)

Έστω το x επιλέγεται ως 1ο στοιχείο του S από τον άπληστο που αφορά το σταθμισμένο μητροηδές $M = (S, I)$. Το εναπομένον πρόβλημα εξεύρεσης ανεξάρτητου υποσυνόλου μεγίστου βάρους που να περιέχει το x μειώνεται στην εξέυρεσης ανεξάρτητου υποσυνόλου του σταθμισμένου μητροειδούς $M' = (S', I')$ όπου:

$$S' = \{y \in S : \{x, y\} \in I\}$$
$$I' = \{B \subseteq S - \{x\} : B \cup \{x\} \in I\}$$

Η σταθμισμένη συνάρτηση για το M' είναι η σταθμισμένη συνάρτηση του M περιορισμένη στο S'. Το M' καλείται συστολή του M από το στοιχείο x.

Ορθότητα του άπληστου αλγορίθμου σε Μητροειδή

Theorem

Αν $M = (S, I)$ είναι ένα σταθμισμένο μητροειδές με συν/ση w, τότε όταν καλούμε τον άπληστο (M, w) επιστρέφει ένα βέλτιστο υποσύνολο.

Proof.

Από το λήμμα 2 κάθε στοιχείο το οποίο παραλείπεται αρχικά λόγω του ότι δεν αποτελεί επέκταση του $\emptyset$ μπορεί να ξεχαστεί μιας και δεν θεωρούνται χρήσιμα. Από την άλλη όταν το x επιλέγεται, από το λήμμα 1 εξάγεται ότι ο Άπληστος δεν κάνει λάθος με την προσθήκη του x στο A, αφού υπάρχει ένα βέλτιστο υποσύνολο που περιέχει το x. Τέλος, από το λήμμα 3 συνεπάγεται ότι το εναπομένον πρόβλημα είναι η εύρεση ενός βέλτιστου υποσυνόλου στο μητροηδές M', το οποίο είναι συστολή του M με το x. ∎

Έστω H ένα πραγματικών τιμών πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $x = [x_j]$, $j \in E$, όπου τις περισσότερες φορές τα στοιχεία του H ειναι ακέραιες τιμές ή συνηθέστερα $\{0, 1\}$ και E ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων.
$c = c[j]$, $j \in E$ πραγματικό διάνυσμα στο E και λέγεται objective or weighting του E.
Το πρόβλημα εύρεσης ενός μέλους του H όπου μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την έκφραση $cx = \sum_j c_j x_j$, $j \in E$ λέγεται loco problem ή loco programming (loco: linear-objective combinatorial). Για να ορισθεί ένα τέτοιο πρόβλημα θα πρέπει να προσδιορισθεί το H.
Υπάρχουν κάποιο τρόποι να περιγράψουμε αρκετά μεγάλα σύνολα H, μερικοί από αυτούς είναι ο γραμμικός προγραμ/μός ($l.p.$), ο ακέραιος γραμμικός προγραμ/σμός.

Ο σκοπός του ερευνητικού άρθρου είναι η μελέτη του loco προβλήματος και η μετατροπή του σε linear programming (l.p) μέσω πολύ μεγάλων γραμμικών συστημάτων.
Το συγκεκριμένο loco πρόβλημα λέγεται matroidal or m.l. πρόβλημα και υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος είναι απλός και αποτελεσματικός και λέγεται greedy algorithm.

Έστω ένας πίνακας $\boldsymbol{A}$ οι στήλες E θα προσδιορίζουν το H του $m.l.$ προβλήματος και ο $\boldsymbol{A}$ μπορεί να ορισθεί σε οποιδήποτε πεδίο.
Ένα διάνυσμα $x = x[j]$, $j \in E$ με 0 και 1 καλείται incidence διάνυσμα του υποσυνόλου $j's$ τ.ω. $x_j = 1$. Για κάθε οικογένεια K των υποσυνόλων του E και για κάθε στάθμιση $c = c[j]$ του E, η εύρεση ενός $B \in K$ τ.ω. το βάρος $c(B) = \sum_j c_j$, $j \in B$ να είναι μέγιστο αποτελεί ένα loco πρόβλημα ή καλύτερα ένα $\{0,1\}$ loco πρόβλημα με τα στοιχεία του H να είναι incidence διανύσματα των στοιχείων του K.
Ένα m.l πρόβλημα μαζί με έναν πίνακα περιορισμών $\boldsymbol{A}$ αποτελεί ένα $\{0,1\}-$ loco πρόβλημα με K να είναι η οικογένεια των υποσυνόλων των σύνολων-στηλών E του $\boldsymbol{A}$, οι οποίες είναι οι στήλες βάσης του $\boldsymbol{A}$. Επομένως για δοθέν πίνακα $\boldsymbol{A}$ και στάθμιση $c = [c_j]$, $j \in E$ το m.l πρόλημα είναι να βρεθεί μία μέγιστη ή ελάχιστη weight column-basis του $\boldsymbol{A}$.

Ο άπληστος αλγόριθμος μεγιστοποιεί το cx ως προς το incidence διάνυσμα των μελών του K ως εξής:

- σε κάθε βήμα επιλέγει ένα μέγιστο βάρος από τα μέλη του E που δεν έχει επιλεχθεί

Ο άπληστος αλγόριθμος μεγιστοποιεί το cx ως προς το incidence διάνυσμα των μελών του K ως εξής:

- σε κάθε βήμα επιλέγει ένα μέγιστο βάρος από τα μέλη του E που δεν έχει επιλεχθεί
- μαζί με τα μέλη που έχει ήδη συλλέξει σχηματίζει ένα υποσύνολο κάποιων μελών του K.

Άπληστος Αλγόριθμος για το $\{0,1\}$ – *loco* πρόβλημα

Ο άπληστος αλγόριθμος μεγιστοποιεί το cx ως προς το incidence διάνυσμα των μελών του K ως εξής:

- σε κάθε βήμα επιλέγει ένα μέγιστο βάρος από τα μέλη του E που δεν έχει επιλεχθεί
- μαζί με τα μέλη που έχει ήδη συλλέξει σχηματίζει ένα υποσύνολο κάποιων μελών του K.
- ο αλγόριθμος σταματά όταν αυτό το μέλος του E περιλαμβάνεται ως μέλος του K.

Ένα γράφημα G είναι εφικτό να παρουσιασθεί μέσω ενός πίνακα $\boldsymbol{A}$ αποτελούμενο από (0 και 1) $\mod 2$, ο οποίος έχει ακριβώς δύο 1 σε κάθε κολώνα. Οι στήλες και οι γραμμές του $\boldsymbol{A}$ είναι οι ακμές και οι κόμβοι του G, αντίστοιχα. Ένας κόμβος συνδέεται με μια ακμή αν υπάρχει 1 στο στοιχείο του πίνακα $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχεί σε αυτή τη θέση (κολώνας-γραμμής).
Αν υποθέσουμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό τότε η βάση-στήλες του $\boldsymbol{A}$ είναι ακριβώς το σύνολο ακμών του spanning-trees του G και τα γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα των στηλών είναι το σύνολο των ακμών των δασών στο G. Επομένως το βέλτιστο spanning-tree είναι ένα m.I πρόβλημα δοθέντος του πίνακα $\boldsymbol{A}$.

Definition (1)

Μια βάση οποιουδήποτε υποσυνόλου $S \subseteq E$ της κολώνας του $\boldsymbol{A}$ μπορεί να ορισθεί ως μέγιστο γραμμικό ανεξάρτητο υποσύνολο J του S. Μέγιστο υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει γραμμικό ανεξάρτητο υποσύνολο του S που να περιέχει το J.

Το γεγονός ότι ο άπληστος αλγόριθμος πάντοτε θα παράγει μια μέγιστη βάση βαρών του συνόλου E των στηλών του $\boldsymbol{A}$, $\forall\{0,1\} - valued$ στάθμιση $c = [c_j]$, $j \in E$, αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα του loco προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα:

Theorem (1)

Για κάθε $S \subseteq E$ κάθε βάση J του S έχει την ίδια πληθικότητα $|J|$, όπου καλείται rank $r(S)$ του S.

Definition (2)

Ορίζουμε ένα σύνολο E και μια μή κενή οικογένεια F ως ανεξάρτητο σύστημα $M = (E, F)$ στο E ή $M-$ανεξάρτητο υποσύνολο του E τ.ω. κάθε υποσύνολο ενός ανεξάρτητου συνόλου είναι ανεξάρτητο.

Definition (3)

Για ένα ανεξάρτητο σύστημα M στο σύνολο E και για κάθε $S \subseteq E$ μία βάση $M-$βάση του S ορίζεται όπως και στην περίπτωση της γραμμικής ανεξαρτησίας (Definition 1) απλά στον ορισμό εκείνο αντικαθιστούμε τη γραμμική ανεξαρτησία με το $M-$ανεξαρτησία.

Ένα Μητροειδές (Matroid) $M = (E, F)$ είναι ένα ανεξάρτητο σύστημα και έχει την ιδιότητα του Θεωρήματος 1. Με άλλα λόγια ένα μητρωειδές είναι ένα ανεξάρτητο σύστημα $M = (E, F)$ όπου το clutter της $M-$ βάσης του E είναι τέτοια, ώστε για κάθε $\{0, 1\}$ σταθμισμένη τιμή του E, ο άπληστος αλγόριθμος πάντα παράγει στοιχείο μεγίστου βάρους του K.
Λέγοντας clutter K σε ένα σύνολο E εννοούμε μια οικογένεια από υποσύνολα του E τ.ω. κανένο στοιχείο του K να μην περιέχεται σε κάποιο άλλο.

Πηγές

1. Matroids and the greedy algorithm, J. Edmonds, 1971
2. Combinatorial optimization, Algorithms and Complexity, Papadimitriou and Steiglitz
3. Εισαγωγή στους αλγορίυμους, *CLRS*

Τέλος παρουσίασης

Ευχαριστώ πολύ για το χρόνο σας!