Μονοπάτια, Δέντρα και Λουλούδια

Jack Edmonds

Παπαδόπουλος Κυριάκος

16 Δεκεμβρίου 2021

Outline

Εισαγωγικά

Definition

Γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ των συνόλων V και E, όπου E περιέχει υποσύνολα του V, το καθένα εκ των οποίων έχει 2 στοιχεία του V. Ονομάζουμε V το σύνολο των κορυφών και E το σύνολο των ακμών.

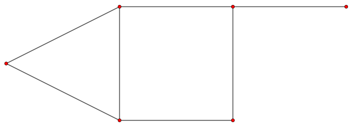
Definition

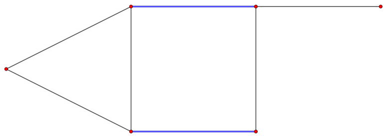
Κύκλωμα ενός γραφήματος G είναι ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του G στο οποίο κάθε κορυφή του B συναντά ακριβώς δυο πλευρές του B.

Έννοια του Ταιριάσματος

Definition

Ένα ταίριασμα M είναι ένα υποσύνολο των πλευρών του γραφήματος G τέτοιο ώστε καμία κορυφή να μην εμφανίζεται σε 2 πλευρές του ταιριάσματος. Συμβολίζεται με (G, M).





Definition

- Μεγιστικό είναι ένα ταίριασμα όταν δεν είναι υποσύνολο κάποιου άλλου ταιριάσματος.
- Μέγιστο είναι ένα ταίριασμα όταν είναι το μεγαλύτερο δυνατό ταίριασμα σε ένα γράφημα.
- Τέλειο είναι ένα ταίριασμα όταν στις πλευρές του ταιριάσματος περιέχονται όλες οι κορυφές του γραφήματος.

Definition

Δωσμένου ενός γραφήματος G και ενός ταιριάσματος M, μια κορυφή είναι εκτεθειμένη, όταν δεν περιέχεται σε καμία πλευρά του M.

Σκοπός

Σκοπός μας είναι να βρούμε έναν αποδοτικό αλγόριθμο εύρεσης μέγιστου ταιριάσματος δεδομένου ενός γραφήματος.

Μονοπάτια προς το δάσος
Ο απλός αλγόριθμος του Berge

Definition

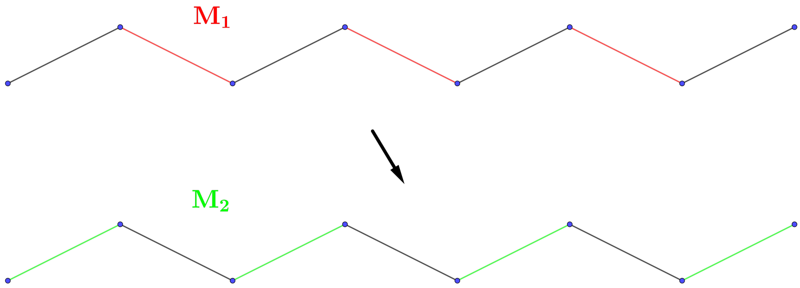
Για (G, M), ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι, ή εναλλασσόμενο κύκλωμα, P είναι ένα μονοπάτι, ή κύκλωμα, στο οποίο η κάθε κορυφή του περιέχεται σε μια ακμή στο $M \cap P$ και σε μια ακμή στο $M' \cap P$, εκτός απο τις τελικές κορυφές, σε περίτπωση του μονοπατιού.

Definition

Ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι που ξεκινάει και καταλήγει σε εκτεθειμένη κορυφή θα το αποκαλούμε ενισχυτικό μονοπάτι.

Η σημασία του ενισχυτικού μονοπατιού

Ένα ενισχυτικό μονοπάτι ονομάζεται έτσι καθώς μας βοηθάει να μεγαλώσουμε το ταίριασμα που έχουμε κατα 1.



Βοηθητική Πρόταση

Πρόταση

Για κάθε δυο ταιριάσματα M_1 και M_2 σε ένα γράφημα G, τα μέρη του γραφήματος που σχηματίζεται απο το $M_1 + M_2$, είναι μονοπάτια και κυκλώματα, τα οποία έχουν εναλλασσόμενες πλευρές απο το M_1 και το M_2.

Επιπλέον κάθε μονοπάτι έχει εκτεθειμένη την αρχική και τελική κορυφή του είτε για το M_1 είτε για το M_2.

Απόδειξη

- Κάθε κορυφή του G περιέχεται το πολύ σε μια ακμή του M_1 και μια ακμή του M_2. Άρα θα περιέχεται το πολύ σε 2 ακμές του $M_1 + M_2$, μια στο $M_1 \cap M_2'$ και μια στο $M_2 \cap M_1'$.
- Έστω ένα τελικό σημείο v του μονοπατιού στο γράφημα $M_1 + M_2$, και έστω οτι περιέχεται σε μια ακμή του $M_1 \cap M_2'$. Το v δεν περιέχεται σε καμια άλλη ακμή του M_1.
  Αν υπάρχει ακμή του M_2 που να περιέχει το v, τότε αυτή η ακμή θα άνηκε και στο $M_1 + M_2$, αλλά τότε το v δεν θα ήταν τελικό σημείο.
  Άρα το v είναι εκτεθειμένο.

Θεώρημα

Ένα ταίριασμα M στο G δέν είναι μέγιστο αν και μόνο αν στο (G, M) περιέχεται ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι που να ενώνει 2 εκτεθειμένες κορυφές του .

Απόδειξη.

$(\Leftarrow)$ Αν υπάρχει ένα εναλλασόμενο μονοπάτι που να εννώνει 2 εκτεθειμένες κορυφές του M, τότε αυτό το μονοπάτι είναι ενισχυτικό. Μπορώ δηλαδή να φτιάξω ένα ταίριασμα μεγαλύτερου μεγέθους. Άρα το G δεν είναι μέγιστο.
$(\Rightarrow)$ Αν το M δεν είναι το μέγιστο ταίριασμα τότε υπάρχει ένα μεγαλύτερο ταίριασμα M_2. Το $M + M_2$ περιέχει περισσότερες ακμές του M_2 απο το M. Απο προηγούμενη βοηθητική πρόταση το $M + M_2$ θα περιέχει ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι του οποίου τα τελικά σημεία θα είναι εκτεθειμένα απο την M. $\square$

Ένας απλός αλγόριθμος

Ο Berge πρότεινε τον εξής αλγόριθμο για την εύρεση μέγιστων ταιριασμάτων.

- Παίρνουμε αυθαίρετα ένα σύνολο πλευρών ως το αρχικό ταίριασμα.
- Επιλέγουμε μια εκτεθειμένη κορυφή.
- Επιλέγουμε μια ακολουθία ακμών, που να εναλλάσονται ανάμεσα σε ακμές που ανήκουν στο ταίριασμα και ακμές που δεν ανήκουν στο ταίριασμα, μέχρι να καταλήξουμε σε μια εκτεθειμένη κορυφή.
  - Αν βρούμε εκτεθειμένη κορυφή τότε έχουμε ενισχυτικό μονοπάτι και μεγαλώνουμε το ταίριασμα κατα 1.
  - Αν δεν βρούμε εκτεθειμένη κορυφή, τότε πηγαίνουμε προς τα πίσω και ψάχνουμε ξανά.
  - Αν δεν βρούμε κανένα εναλλασσόμενο μονοπάτι ανάμεσα σε 2 εκτεθειμένες κορυφές τότε δεν υπάρχει ενισχυτικό μονοπάτι, και άρα το ταίριασμα που έχουμε είναι το μέγιστο.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι προβληματικός.
Όταν συναντήσει περιττό κύκλο, μπορεί να «μπερδευτεί» και να κάνει πολύ ώρα.
Τελικά, θέλει εκθετικό χρόνο.
Θέλουμε κάτι καλύτερο.

Μέσα στο δάσος
Βελτιώνοντας τον αλγόριθμο

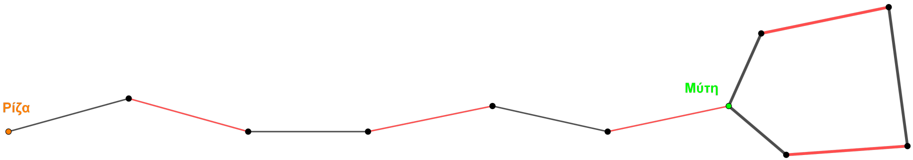
Λουλούδια

Definition

- Αποκαλούμε βλαστό σε ένα (G, M) ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι με μια εκτεθειμένη κορυφή v στο ένα άκρο, και μια κορυφή u που ανήκει σε ακμή του ταιριάσματος στο άλλο άκρο.
  Αποκαλούμε την v τη ρίζα του βλαστού και την u την μύτη του βλαστού.
- Αποκαλούμε άνθος $B(M)$ σε ένα (G, M) ένα περιττό κύκλωμα για το οποίο το $M \cap B$ είναι ένα μέγιστο ταίριασμα στο B. Ένα άνθος έχει υποχρεωτικά μια εκτεθειμένη κορυφή.

Definition

Ένα λουλούδι αποτελείται απο ένα βλαστό και ένα άνθος που τέμνονται μόνο στη μύτη του βλαστού.



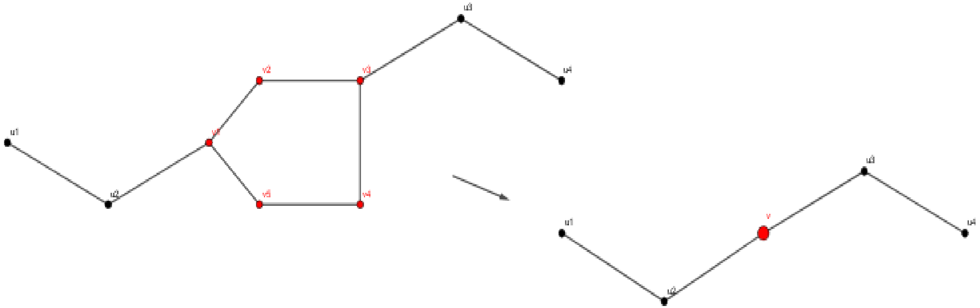
Συμπιέζοντας τα Λουλούδια

Όπως αναφέραμε η δομή του λουλουδιού είναι προβληματική. Για αυτό, όταν συναντάμε ενα λουλούδι θα συμπιέζουμε τις κορυφές του άνθους σε μια κορυφή, και θα συνεχίζουμε την διαδικασία.

Ονομάζουμε την κορυφή αυτή ψευδοκορυφή.

Πιο τυπικά, αντικαθιστούμε το άνθος με την ψευδοκορυφή b. Όλες οι κορυφές που συνδέονταν με ακμή στο άνθος, πλέον συνδέονται με ακμή στην κορυφή b. Φτιάχνουμε δηλαδή ένα νέο, μειωμένο γράφημα απο το αρχικό.

Συμπίεση Άνθους



Επαναφέροντας τα Λουλούδια

Όταν βρούμε το ταίριασμα που θέλουμε στο μειωμένο γράφημα επαναφέρουμε τα άνθη που είχαμε συμπιέσει.
Αρκεί πλέον να βρούμε μέγιστα ταιριάσματα μέσα στα άνθη, κάτι το οποίο είναι απλό.
Η ψευδοκορυφή b ανήκει μόνο σε μια ακμή e του ταιριάσματος. Επιπλέον μέσα σε ένα περιττό κύκλωμα πάντα θα έχω μια εκτεθειμένη κορυφή. Στην επαναφορά λοιπόν θα φροντίσω η εκτεθειμένη κορυφή του άνθους να ανήκει στην ακμή e του ταιριάσματος.

Δέντρα

Definition

Ένα δέντρο είναι ένα γράφημα στο οποίο κάθε ζευγάρι κορυφών ενώνεται με ένα ακριβώς μονοπάτι.

- Ένα εναλλασσόμενο δέντρο J είναι ένα δέντρο, όπου η κάθε ακμή του συνδέει μια εξωτερική κορυφή με μια εσωτερική κορυφή, και κάθε εσωτερική κορυφή περιέχεται σε ακριβώς 2 ακμές του δέντρου.
- Ένα φυτεμένο δέντρο $J = J(M)$, του γραφήματος G για ένα ταίριασμα M, είναι ένα αναλλασσόμενο δέντρο στο G τέτοιο ώστε, το $M \cap J$ είναι ένα μέγιστο ταίριασμα του J και η κορυφή $r \in V(J)$ που είναι εκτεθειμένη για το $M \cap J$ είναι εκτεθειμένη και για το ταίριασμα M. Η κορυφή r ονομάζεται ρίζα του $J(M)$. Μια εκτεθειμένη κορυφή ικανοποιεί τον ορισμό του φυτεμένου δέντρου.

Γιατι υπάρχει πάντα ρίζα

Πρόταση

Για κάθε εξωτερική κορυφή v ενός εναλλασσόμενου δέντρου J υπάρχει ένα μοναδικό μέγιστο ταίριασμα του J που αφήνει την v εκτεθειμένη και την μοναδική εκτεθειμένη κορυφή κορυφή του J.

Απόδειξη.

Αφαιρόντας απο το J μια εσωτερική κορυφή u, μένουν 2 εναλλασσόμενα δέντρα, J_1 και J_2.

Θεωρώ επαγωγικά οτι υπάρχει ένα μέγιστο ταίριασμα στο J_1 που αφήνει μια εξωτερική κορυφή v_1 εκτεθειμένη, και ένα μέγιστο ταίριασμα στο J_2 που αφήνει την εξωτερική κορυφή v_2 εκτεθειμένη, όπου η v_2 εννώνεται στο J μια μια ακμή e_2 με την κορυφή u.

Η εννώση των δύο ταιριασμάτων των J_1 και J_2 με την ακμή e_2 μας δίνει ένα μέγιστο ταίριασμα που αφήνει μόνο την v_1 εκτεθειμένη. (αφού κάθε ακμή του J αγγίζει μια εσωτερική και μια εξωτερική κορυφή, κάθε μέγιστο ταίριασμα αφήνει μόνο μια εξωτερική κορυφή εκτεθειμένη.) $\square$

Ενισχυτικά Δέντρα

Definition

Ένα ενιχσουτικό δέντρο $J_A = J_A(M)$ στο (G, M) είναι ένα φυτεμένο δέντρο $J(M)$ συν μια ακμή e του G τέτοια ώστε η μια κορυφή που αγγίζει η e να είναι μια εξωτερική ακμή v_1 του J και η άλλη κορυφή να είναι μια εκτεθειμένη κορυφή v_2 που να μην ανήκει στο J.

Το μονοπάτι στο J_A που εννώνει την ρίζα του J με την κορυφή v_2 είναι ένα ενισχυτικό μονοπάτι.

Ανθισμένο Δέντρο

Definition

Ένα ανθισμένο δέντρο, J_F, στο (G, M) είναι ένα φυτεμένο δέντρο J συν μια πλευρά e του G η οποία εννώνει ένα ζευγάρι εξωτερικών κορυφών του J.

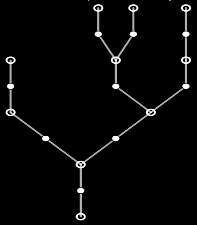
Η έννωση της e και των δυο μονοπατιών που εννώνουν τις 2 εξωτερικές κορυφές με την ρίζα του J είνα ένα λουλούδι F.

Definition

Ένα Ουγγρικό δέντρο H σε ένα γράφημα G είναι ένα εναλλασσόμενο δέντρο του οποίου οι εξωτερικές κορυφές ενώνονται με ακμές του G μόνο σε εσωτερικές κορυφές του.

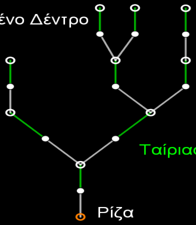
Ο συγκεκριμένος ορισμός αφορά τη γενικότερη δομή του γραφήματος G, όχι του εναλλασσόμενου δέντρου.

Εναλλασσόμενο Δέντρο



Ανθισμένο Δέντρο

Φυτεμένο Δέντρο



Ενισχυτικό Δέντρο

Η βάση του νέου αλγόριθμου.

Θεώρημα

Για ένα ταίριασμα M, σε ένα γράφημα G, κάθε φυτεμένο δέντρο $J(M)$ στο γράφημα G μπορεί να επεκταθεί είτε σε ένα ενισχυτικό δέντρο, ή σε ένα ανθισμένο δέντρο, ή σε ένα ουγγρικό δέντρο.

Απόδειξη.

Παίρνουμε ένα φυτεμένο δέντρο J και ένα σύνολο ακμών D, στο γράφημα G, που δεν ανήκουν στο σύνολο ακμών του J αλλά εννώνουν εξωτερικές με εσωτερικές κορυφές του J. (Το D μπορεί να είναι κενό).

Αν καμία εξωτερική κορυφή δεν συναντά μια ακμή που δεν είναι στο $D \cup J$, τότε το J είναι Ουγγρικό δέντρο.||

Διαφορετικά, μια εξωτερική κορυφή, έστω v_1 συναντά μια ακμή e που δεν είναι στο $D \cup J$, και το άλλο άκρο της είναι η κορυφή v_2.

- Αν η v_2 είναι εσωτερική κορυφή του J, μπορούμε να επεκτείνουμε το D, βάζοντας την e μέσα στο D.
- Αν η v_2 είναι εξωτερική κορυφή του J, τότε $e \cup J$ είναι ενα ανθισμένο δέντρο.||
- Αν η v_2 δεν ανήκει στο J, και είναι εκτεθειμένη τότε $e \cup J$ είναι ένα ενισχυτικό δέντρο. ||
- Αν η v_2 δεν ανήκει στο J, και δεν είναι εκτεθειμένη τότε υπάρχει μια ακμή e_2 η οποία ανήκει στο ταίριασμα. Αυτή η ακμή δεν είναι στο J, άρα η άλλη κορυφή που συναντά την e_2, έστω v_3 είναι εκτός J. Σε αυτήν την περίπτωση επεκτείνουμε το δέντρο J, συνδέοντας τις ακμές e, e_2, και πλέον έχουμε μια νέα εσωτερική κορυφή, την v_2, και μια νέα εξωτερική κορυφή, την v_3.

Blossom Algorithm

Το παραπάνω θεώρημα είναι ουσιαστικά οδηγίες κατασκευής ενός αλγορίθμου έυρεσης μέγιστου ταιριάσματος.

Blossom Algorithm

- Ψάχνουμε για φυτεμένο δέντρο J.
  - Αν δεν βρούμε, τότε έχουμε τέλειο ταίριασμα.
  - Αν βρούμε επεκτείνουμε το δέντρο J.
    - Αν καταλήξουμε σε ενισχυτικό δέντρο τότε αξιοποιούμε το ενισχυτικό μονοπάτι που έχουμε, επεκτείνουμε το ταίριασμα κατά 1, κρατάμε το νέο ταίριασμα και συνεχίζουμε απο την αρχή.
    - Αν καταλήξουμε σε ανθισμένο δέντρο τότε συμπιέζουμε το άνθος κρατάμε το ταίριασμα του δέντρου και συνεχίζουμε απο την αρχή, στο μειωμένο γράφημα.
    - Αν καταλήξουμε σε ουγγρικό δέντρο, επαναφέρουμε τα συμπιεσμένα άνθη και το ταίριασμα του φυτεμένου δέντρου που έχουμε είναι το μέγιστο.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι αποδοτικός καθώς περνάει απο κάθε ακμή μια φορά.
Τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο, πιο συγκερκιμένα σε $O(|V|^4)$
$(|V|)$ εκτεθειμένες κορυφές για τις οποίες θα τρέξουμε τον blossom/θα κάνουμε επεκτάσεις.
$(|V|)$ συρικνώσεις ανθών.
Κατασκευσή εναλλασόμενου δέντρου θέλει το πολύ $|V|^2$.

Αναφορά στα Διμερή γραφήματα

Σε ένα διμερές γράφημα μπορούμε να εφαρμόσουμε μια μορφή του απλού αλγόριθμου του Berge, αφού δεν έχουμε περιττούς κύκλος, και έτσι δεν μπορούμε να έχουμε άνθη και λουλούδια.
Ο αλγόριθμος αυτός λέγεται Ουγγρικός Αλγόριθμος με πολυπλοκότητα $O(|V|^3)$

Σας ευχαριστω για την προσοχη σας.