Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Αλγόριθμοι, Λογική και Διακριτά Μαθηματικά» – 2016

Μητροειδή και άπληστος αλγόριθμος

Ηρώ Οικονόμου

Ιανουάριος 13, 2021

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Δομή παρουσίασης

Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 1

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο (E), και μία συλλογή συνόλων από το E, $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ Μία δυάδα $(E, \mathcal{I})$ καλείται **σύστημα ανεξαρτησίας**, αν ισχύουν τα παρακάτω

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{I}$ και $A' \subseteq A$, τότε $\mathrm{A}' \in \mathcal{I}$

Ορισμός 1

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο (E), και μία συλλογή συνόλων από το E, $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ Μία δυάδα $(E, \mathcal{I})$ καλείται **σύστημα ανεξαρτησίας**, αν ισχύουν τα παρακάτω

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{I}$ και $A' \subseteq A$, τότε $\mathrm{A}' \in \mathcal{I}$

Ορισμός 2

Έστω σύστημα ανεξαρτησίας $M = (E, \mathcal{I})$ καλείται **μητροειδές**, αν ισχύει

(iii) Αν τα $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$, με $|A_1| < |A_2|$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $e \in A_2 \backslash A_1$ τέτοιο ώστε $A_1 \cup e \in \mathcal{I}$ (ιδιότητα της επαύξησης).

Ορισμός 3

Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathcal{I})$ και ένα ανεξάρτητο σύνολο $B \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε για κάθε $e \in E$, $B \cup e \notin \mathcal{I}$. Το B ονομάζεται **βάση** του S.

Ορισμός 3

Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathcal{I})$ και ένα ανεξάρτητο σύνολο $B \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε για κάθε $e \in E$, $B \cup e \notin \mathcal{I}$. Το B ονομάζεται **βάση** του S.

Θεώρημα 1

Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$, και B το σύνολο των βάσεών του. Αν $B_1, B_2 \in B$, τότε $|B1| = |B2|$.

Ορισμός 3

Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $S = (E, \mathcal{I})$ και ένα ανεξάρτητο σύνολο $B \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε για κάθε $e \in E$, $B \cup e \notin \mathcal{I}$. Το B ονομάζεται **βάση** του S.

Θεώρημα 1

Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$, και B το σύνολο των βάσεών του. Αν $B_1, B_2 \in B$, τότε $|B1| = |B2|$.

Απόδειξη Έστω ότι $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$, με $|B_1| < |B_2|$. από την ιδιότητα της επαύξησης γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $e \in B_2 \setminus B_1$, τέτοιο ώστε $B_1 \cup e \in I$, άτοπο.

Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα συνδυαστικής βελτισοποίσης που συνδέεται με ένα σύστημα ανεξαρτησίας $(E, \mathcal{I})$ είναι: Δοθέντων βαρών $w(e) > 0$, για κάθε στοιχείο $e \in E$, βρείτε ένα ανεξάρτητο σύνολο το οποίο έχει το μέγιστο δυνατό βάρος.

Έστω πίνακας A, και

- E: το σύνολο των στηλών του A
- $x = [x_j], j \in E$: διάνυσμα από μηδενικά και άσσους, incidence διάνυσμα
- $c = [c_j], j \in E$: διάνυσμα πραγματικών στοιχείων πάνω στο E.(ανάθεση βαρών)
- K: οικογένεια ανεξάρτητων υποσυνόλων του E (βάσεις των στηλών του A).

Loco πρόβλημα

Δοθέντων κάποιου πίνακα και βαρών $c = [c_j], j \in E$, το μητροειδές πρόβλημα είναι η εύρεση μέγιστου βάρους γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του E ή ισοδύναμα μέγιστης(ελάχιστης) σε βάρος βάσης στηλών του A.

Έστω πίνακας A, και

- E: το σύνολο των στηλών του A
- $x = [x_j], j \in E$: διάνυσμα από μηδενικά και άσσους, incidence διάνυσμα
- K: οικογένεια ανεξάρτητων υποσυνόλων του E (βάσεις των στηλών του A).

Παρατήρηση

Οι βάσεις των στηλών του A είναι ακριβώς τα σύνολα ακμών των δέντρων επικάλυψης ενός γραφήματος G και τα γραμμικώς ανεξάρτητα σύνολα των στηλών είναι τα δάση του G.
Επομένως, το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστου συνδετικού δέντρου έχει άμεση σχέση με το πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω.

Άπληστος Αλγόριθμος

Άπληστος Αλγόριθμος

Input: $(E, \mathcal{J})$ σύστημα αναξαρτησίας και μία ανάθεση βαρών

$I = \emptyset$;
while $E \neq \emptyset$ **do**
    Έστω e το στοιχείο του E το οποίο έχει το μέγιστο βάρος;
     Αφαίρεσε το e από το E;
    if $I + e \in \mathcal{J}$ **then**
        $I = I + e$;
    end
end
return I

Θεώρημα 2

Έστω ένα σύστημα ανεξαρτησίας $M = (E, \mathcal{I})$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Το M είναι μητροειδές
- Για οποιαδήποτε ανάθεση βαρών στα στοιχεία του E, το Πρόβλημα Μεγιστοβαρούς Βάσης, επιλύεται βέλτιστα από τον Άπληστο Αλγόριθμο.

Απόδειξη Έστω το μητροειδές M στο σύνολο E και μία ανάθεση βαρών, $c = [c_j], j \in E$. Έστω $B_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}, B_1 \in \mathcal{I}$ είναι το ανεξάρτητο σύνολο που αποδίδει ο άπληστος αλγόριθμος. Αν κάθε άλλο στοιχείο, που θα μπορούσε να συμπεριληφθεί στο B_1 για να προκύψει ένα μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο, ο άπληστος αλγόριθμος, θα είχε γίνει κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου. Συνεπώς B είναι μια βάση.

Θεώρημα 2

Απόδειξη Έστω προς άτοπο: Υποτεθείστω ότι υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο $B_2 = \{h_1, \dots, h_k\}$ για τα στοιχεία του οποίου ισχύει ότι

$$\sum_{i \in B_1} c_i < \sum_{i \in B_2} c_i$$

.

Έστω ότι B_2 είναι μια βάση. Λόγο του Θεωρήματος 1, $|B_1| = |B_2| \Rightarrow n = k$. Έστω ότι τα στοιχεία των B_1, B_2 διατάσσονται ως προς τους δείκτες τους σε φθίνουσα σειρά βαθμού του βάρους που τους αντιστοιχεί. Έστω i είναι ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο ισχύει η $c_{g_i} < ch_i$, και $B_{1(i-1)} = \{g_1, \dots, g_{i-1}\}$, $B_{2(i-1)} = \{h_1, \dots, h_{i-1}\}$. Σύμφωνα με την ιδιότητα της ανταλλαγής υπάρχει κάποιο στοιχείο $h_j \in B_2 i$ τέτοιο ώστε $B_{1(i-1)} \cup hj$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Θα ισχύει τότε, $c_{hj} \geq c_{hi} \geq c_{gi}$. Άρα, ο άπληστος αλγόριθμος εξετάζει μεν απορρίπτει δε το βαρύτερο στοιχείο h_j πριν ακόμη εξετάσει το ελαφρύτερο στοιχείο gi. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς ο συγκεκριμένος αλγόριθμος κάνει δεκτά τα στοιχεία σε φθίνοντα ως προς το βάρος τους βαθμό.

- Η ουσία της μητροειδούς μορφής έιναι ότι κάθε μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο (maximal) είναι επίσης μέγιστο (maximum). Η εύρεση ενός μεγιστικού ανεξάρτητου υποσυνόλου είναι εύκολη, αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο.

Τομή μητροειδών

Έστω δύο μητροειδή $M = (E, \mathcal{I}_1)$ και $\mathrm{N} = (E, \mathcal{I}_2)$. Η τομή τους είναι το σύνολο $\mathcal{M} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

Το πρόβλημα είναι: Δοθέντων δύο συστημάτων ανεξαρτησίας και των βαρών $w(e) > 0$, για κάθε στοιχείο $e \in E$, βρείτε ένα ανεξάρτητο σύνολο $\mathrm{I} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ το οποίο έχει το μέγιστο δυνατό βάρος.

Συμπεράσματα

Συμπεράσματα

- Τα μητροειδή επιτρέπουν την ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποιήσεων στη συνδυαστική ανάλυση, δεδομένου ότι είναι ακριβώς οι δομές για τις οποίες ο άπληστος αλγόριθμος λειτουργεί.
- Ορίστηκε ένα μητροειδές, ως εκείνο το σύστημα ανεξαρτησίας για το οποίο ο άπληστος αλγόριθμος επιστρέφει πάντα λύση.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

Αναφορές

Jack Edmonds. “Matroids and the greedy algorithm”. In: *Mathematical Programming* 1.1 (1971), pp. 127–136. issn: 0025-5610. doi: 10.1007/BF01584082.