A Tournament Problem

LESTER R. FORD JR., SELMER M. JOHNSON

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΑΥΔΗΣ

Τα τουρνουά τέννις στον πραγματικό κόσμο (βλ. Australian Open) δεν δημιουργούν μια δίκαιη κατάταξη (από τη $2^{η}$ θέση και μετά)!

Έχουμε ένα τουρνουά τέννις ανάμεσα σε n αθλητές και το βασικό ερώτημα είναι το εξής:

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός αγώνων που χρειάζεται να παιχτούν ώστε να είμαστε ικανοί (πάντα) να ταξινομήσουμε σωστά όλους τους n παίκτες;

Steinhaus (1950)

Με επαγωγή:

1. Έχουμε κατατάξει ήδη k παίκτες μεταξύ τους και θα εισάγουμε τον επόμενο.
2. Τον βάζουμε να παίξει με τον «μεσαίο» στην έως τώρα κατάταξη.
3. Ανάλογα με το αποτέλεσμα του παιχνιδιού, τον τοποθετούμε στο πάνω/κάτω μισό της κατάταξης κάνοντάς τον να παίξει με τον «μεσαίο» σε αυτό το κομμάτι της κατάταξης έως ότου τοποθετηθεί στη σωστή θέση (σαν binary search).
4. Αν συμβολίσουμε με S(k) το πλήθος των παιχνιδιών που χρειάζεται να παίξει ο παίκτης που εισέρχεται στην κατάταξη των k παικτών, τότε

$$S(k) = 1 + [\log_2 k]$$

όπου [x] είναι το ακέραιο μέρος του x.

Κάνοντας πράξεις βλέπουμε πως με τη μέθοδο του Steinhaus, εάν συμβολίσουμε με M(k) το πλήθος των αγώνων που είναι αναγκαίοι για να καταταχτούν ακριβώς οι k παίκτες, ισχύει ότι

$$M(n) = 1 + n\,S(n) - 2^{S(n)}$$

Κάτω φράγμα για το πλήθος των αγώνων που είναι αναγκαίοι

$$L(n) = 1 + [\log(n!)]$$

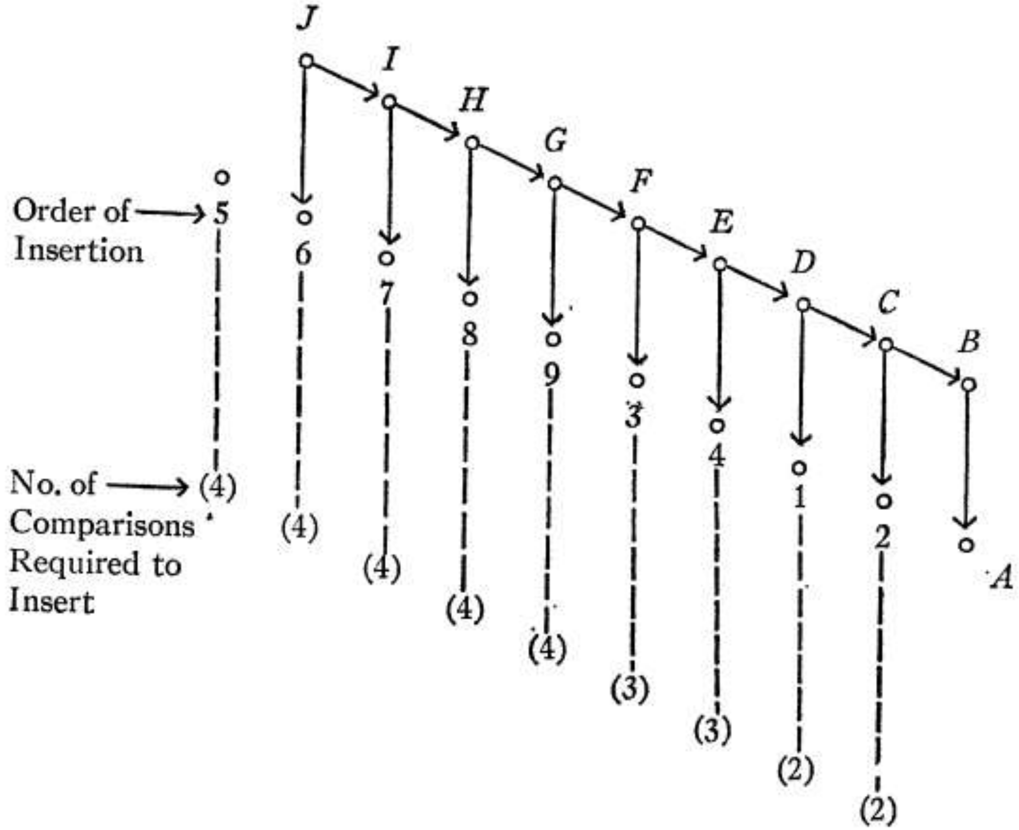
"Κάθε παιχνίδι δε μπορεί παρά να διαιρεί τις εναπομένουσες κατατάξεις στη μέση".

Η Βελτιωμένη Διαδικασία (1959)

Το πλήθος των παικτών που θέλουμε να κατατάξουμε είναι n και $n=2r$ ή $n=2r+1$.

1. Στον πρώτο γύρο τους χωρίζουμε σε r ζευγάρια (μπορεί να αφήσουμε έναν απ’έξω).
2. Με τη μέθοδο που θα παρουσιάσουμε, κατατάσσουμε σωστά τους r νικητές του πρώτου γύρου.
3. Και κάνουμε αυτό που φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα για τους υπόλοιπους.

Κύρια αλυσίδα: J I H G F E D C B A
Με τη μέθοδο του Steinhaus (binary search) μας συμφέρει να εισάγουμε στοιχεία σε σύνολα από $2^K - 1$ ήδη κατατεταγμένους παίκτες (εξαιτίας του ακέραιου μέρους στον τύπο).



Αυτή η μέθοδος απαιτεί U(n) συγκρίσεις, όπου

$$U(1) = 0$$

$$U(2) = 1$$

$$U(2k) = k + U(k) + \sum_{i=2}^{k} T(i)$$

$$U(2k+1) = k + U(k) + \sum_{i=2}^{k+1} T(i)$$

T(i) είναι ο αριθμός των συγκρίσεων/παιχνιδιών που πρέπει να γίνουν ώστε ο i-οστός ηττημένος του πρώτου γύρου (βλ. σχήμα) να καταταγεί σωστά.

Ισχύει πως

$$
\begin{aligned}
T(i) &= 2, & 1 < i \leq 3 \\
T(i) &= 3, & 3 < i \leq 5 \\
T(i) &= 4, & 5 < i \leq 11 \\
T(i) &= 5, & 11 < i \leq 21
\end{aligned}
$$

$$T(i) = j, t_{j-1} < i \leq t_j$$

με $t_j = \frac{2^{(j+1)} + (-1)^j}{3}$

Εξήγηση του τύπου με σχήμα και επαγωγή

Άρα

$$t_j = 2^j - t_{j-1}$$

και

$$t_1 = 1$$

το οποίο μας δίνει τον επιθυμητό τύπο

$$t_j = \frac{2^{(j+1)} + (-1)^j}{3}$$

Ασυμπτωτικά αποτελέσματα

$$M(n) \sim nlogn \; - \; 0.915n \; + O(logn)$$

$$U(n) \sim nlogn \; - 1.415n \; + O(logn)$$

$$L(n) \sim nlogn \; - 1.443n \; + O(logn)$$