Μάθημα Έκτο

Άρης Παγουρτζής, Βασίλης Νάκος ΑΛΜΑ

Προηγούμενο Μάθημα

Μέθοδος των Πολυωνύμων για το πρόβλημα Ορθογώνιων Διανυσμάτων.

Προηγούμενο Μάθημα

Μέθοδος των Πολυωνύμων για το πρόβλημα Ορθογώνιων Διανυσμάτων.

Σε αυτό το μάθημα: $(min, +)$ συνέλιξη ως υπόθεση δυσκολίας

Η παραδοσιακή συνέλιξη

Για δύο διανύσματα $A, B \in \mathbb{C}^n$, η $(+, \cdot)$ συνέλιξή τους ορίζεται ως το διάνυσμα $A * B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A * B)[k] = \sum_{i+j=k} A[i] \cdot B[j].$$

Η παραδοσιακή συνέλιξη

Για δύο διανύσματα $A, B \in \mathbb{C}^n$, η $(+, \cdot)$ συνέλιξή τους ορίζεται ως το διάνυσμα $A * B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A * B)[k] = \sum_{i+j=k} A[i] \cdot B[j].$$

Η συνέλιξη είναι ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γραμμένος με άλλα λόγια:

Η παραδοσιακή συνέλιξη

Για δύο διανύσματα $A, B \in \mathbb{C}^n$, η $(+, \cdot)$ συνέλιξή τους ορίζεται ως το διάνυσμα $A * B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A * B)[k] = \sum_{i+j=k} A[i] \cdot B[j].$$

Η συνέλιξη είναι ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γραμμένος με άλλα λόγια:
Δείτε τον συντελεστή του x^{i+j} στο

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} A[i] \cdot x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} B[i] \cdot x^i\right).$$

Η παραδοσιακή συνέλιξη

Υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον γρήγορο μετασχηματισμό Φουριέ (FFT) σε χρόνο $O(n \log n)$. Ενδεχομένως η πιο θεμελιώδης (μη τετριμμένη) πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων.

- Υπολογιστική Άλγεβρα.
- Επεξεργασία Σήματος.
- Όραση Υπολογιστών, Γραφικά και επεξεργασία εικόνας.
- Επεξεργασία φυσικής γλώσσας.
- Διαφορικές εξισώσεις, αριθμητική ανάλυση.
- Προβλήματα συμβολοσειρών, πχ σε (βιοπληροφορική).
- Στατιστική, πιθανότητες.
- Ακέραιος προγραμματισμός.

Το είδος συνέλιξης που θα δούμε σήμερα

Η $(min, +)$ συνέλιξη δύο διανυσμάτων/πινάκων/ακολουθιών $A, B \in [W]^n$ ορίζεται ως το διάνυσμα $A \star B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A \star B)[k] = \min_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

Ομοίως ορίζεται και η $(\max, +)$ συνέλιξη.

Το είδος συνέλιξης που θα δούμε σήμερα

Η $(min, +)$ συνέλιξη δύο διανυσμάτων/πινάκων/ακολουθιών $A, B \in [W]^n$ ορίζεται ως το διάνυσμα $A \star B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A \star B)[k] = \min_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

Ομοίως ορίζεται και η $(\max, +)$ συνέλιξη.

$\star$ Τετριμμένος αλγόριθμος: $O(n^2)$, καλύτερος γνωστός $O(n^2/2^{\Theta(\sqrt{\log n})}($.

Το είδος συνέλιξης που θα δούμε σήμερα

Η $(min, +)$ συνέλιξη δύο διανυσμάτων/πινάκων/ακολουθιών $A, B \in [W]^n$ ορίζεται ως το διάνυσμα $A \star B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A \star B)[k] = \min_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

Ομοίως ορίζεται και η $(\max, +)$ συνέλιξη.

$\star$ Τετριμμένος αλγόριθμος: $O(n^2)$, καλύτερος γνωστός $O(n^2/2^{\Theta(\sqrt{\log n})}($.

$\star$ Υπόθεση δυσκολίας: Δεν υπάρχει $n^{2-\epsilon} \cdot \mathrm{poly}(\log W)$ αλγόριθμος για $\epsilon > 0$. Για διευκόλυνσή μας, θα υποθέσουμε ότι $W = \mathrm{poly}(n)$.

Το είδος συνέλιξης που θα δούμε σήμερα

Η $(min, +)$ συνέλιξη δύο διανυσμάτων/πινάκων/ακολουθιών $A, B \in [W]^n$ ορίζεται ως το διάνυσμα $A \star B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ το οποίο ικανοποιεί

$$(A \star B)[k] = \min_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

Ομοίως ορίζεται και η $(\max, +)$ συνέλιξη.

$\star$ Τετριμμένος αλγόριθμος: $O(n^2)$, καλύτερος γνωστός $O(n^2/2^{\Theta(\sqrt{\log n})}($.

$\star$ Υπόθεση δυσκολίας: Δεν υπάρχει $n^{2-\epsilon} \cdot \mathrm{poly}(\log W)$ αλγόριθμος για $\epsilon > 0$.
Για διευκόλυνσή μας, θα υποθέσουμε ότι $W = \mathrm{poly}(n)$.
$\star$ Συχνά, αναφέρεται και ως συνέλιξη πάνω στον τροπικό ημιδακτύλιο (wtf!), βλέπε τροπική γεωμετρία.

Γεωμετρική ερμηνεία

$$(A \star B)[k] = \max_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

’Εστω τα σημεία $(i, A[i])$ και $(j, B[j])$ στο επίπεδο. Τότε το $(A \star B)[k]$ αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη k και την ελάχιστη (μέγιστη) τεταγμένη.

Γεωμετρική ερμηνεία

$$(A \star B)[k] = \max_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

'Εστω τα σημεία $(i, A[i])$ και $(j, B[j])$ στο επίπεδο. Τότε το $(A \star B)[k]$ αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη k και την ελάχιστη (μέγιστη) τεταγμένη.
Αλγόριθμος με πολλαπλασιασμό πολυωνύμων (απλά φτιάχνουμε όλα τα πιθανά σημεία στο άθροισμα Minkowski σημεία): $O(Wn \log(Wn))$.
Θυμηθείτε ότι W είναι ο μέγιστος αριθμός που εμφανίζεται στους A, B.

Γεωμετρική ερμηνεία

$$(A \star B)[k] = \max_{i+j=k}\{A[i] + B[j]\}.$$

'Εστω τα σημεία $(i, A[i])$ και $(j, B[j])$ στο επίπεδο. Τότε το $(A \star B)[k]$ αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη k και την ελάχιστη (μέγιστη) τεταγμένη.
Αλγόριθμος με πολλαπλασιασμό πολυωνύμων (απλά φτιάχνουμε όλα τα πιθανά σημεία στο άθροισμα Minkowski σημεία): $O(Wn\log(Wn))$.
Θυμηθείτε ότι W είναι ο μέγιστος αριθμός που εμφανίζεται στους A, B.

Αλγόριθμος για μικρό W

Για κάθε k βρες το μη μηδενικό μονώνυμο $x^k y^\ell$ με τον χαμηλότερο εκθέτη ως προς ℓ στο γινόμενο

$$\left(\sum_{0 \le i \le n-1} x^i y^{A[i]} \right) \cdot \left(\sum_{0 \le j \le n-1} x^j y^{B[j]} \right).$$

Αυτή είναι η τιμή του $(A \star B)[k]$. Ο πολλαπλασιασμός μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(Wn \log(Wn))$.

Πρόβλημα Σακιδίου.

Δίνονται ζεύγη αριθμών $(w[i], v[i])_{i\in[n]}$ και αριθμός W. Να βρεθεί το υποσύνολο $S \subseteq [n]$ που ικανοποιεί ότι $\sum_{i\in S} w[i] \leq W$, και μεγιστοποιεί το $\sum_{i\in[n]} v[i]$.

Τα ζεύγη $(w[i], v[i])$ λέγονται αντικείμενα, και το W η χωρητικότητα του σακιδίου.

Ερμηνεία του Προβλήματος Σακιδίου

Από τα σημεία

$$\left\{ \left(\sum_{i \in S} w[i], \sum_{i \in S} v[i] \right) : \sum_{i \in S} w[i] \leq W \right\}$$

να βρεθεί αυτό με τη μέγιστη τεταγμένη.

Ερμηνεία του Προβλήματος Σακιδίου

Από τα σημεία

$$\left\{ \left(\sum_{i \in S} w[i], \sum_{i \in S} v[i] \right) : \sum_{i \in S} w[i] \leq W \right\}$$

να βρεθεί αυτό με τη μέγιστη τεταγμένη.

Έστω ο πίνακας $D^{(i)}$, ο οποίος έχει 1 μόνο στη θέση $w[i]$. Τότε το διάνυσμα

$$D^{(1)} \star \ldots \star D^{(n)}$$

όπου $\star$ είναι η $(max, +)$ συνέλιξη, περιέχει στη θέση k την μέγιστη τιμή που μπορώ να πετύχω διάλεγοντας αντικείμενα συνολικού βάρους k.

Συνδέσεις αυτής της συνέλιξης με άλλα προβλήματα.

1. Ανάγεται στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP).

[1] Θα δούμε τι σημαίνει αυτό.

Συνδέσεις αυτής της συνέλιξης με άλλα προβλήματα.

1. Ανάγεται στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP).
2. Ανάγεται στο πρόβλημα 3SUM (δεύτερη σειρά ασκήσεων).

[1] Θα δούμε τι σημαίνει αυτό.

Συνδέσεις αυτής της συνέλιξης με άλλα προβλήματα.

1. Ανάγεται στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP).
2. Ανάγεται στο πρόβλημα 3SUM (δεύτερη σειρά ασκήσεων).
3. Είναι υποτετραγωνικά[1] ισοδύναμο με το πρόβλημα Σακιδίου και το πρόβλημα του μη φραγμένου Σακιδίου.

[1] Θα δούμε τι σημαίνει αυτό.

Συνδέσεις αυτής της συνέλιξης με άλλα προβλήματα.

1. Ανάγεται στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP).
2. Ανάγεται στο πρόβλημα 3SUM (δεύτερη σειρά ασκήσεων).
3. Είναι υποτετραγωνικά[1] ισοδύναμο με το πρόβλημα Σακιδίου και το πρόβλημα του μη φραγμένου Σακιδίου.
4. Είναι υποτετραγωνικά ισοδύναμη με την προσεγγιστική εκδοχή του προβλήματος Αθροίσματος Υποσυνόλου.

[1] Θα δούμε τι σημαίνει αυτό.

Συνδέσεις αυτής της συνέλιξης με άλλα προβλήματα.

1. Ανάγεται στο πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP).
2. Ανάγεται στο πρόβλημα 3SUM (δεύτερη σειρά ασκήσεων).
3. Είναι υποτετραγωνικά[1] ισοδύναμο με το πρόβλημα Σακιδίου και το πρόβλημα του μη φραγμένου Σακιδίου.
4. Είναι υποτετραγωνικά ισοδύναμη με την προσεγγιστική εκδοχή του προβλήματος Αθροίσματος Υποσυνόλου.
5. Η προσεγγιστική εκδοχή του προβλήματος της Διαμέρισης ανάγεται σε αυτό.

[1] Θα δούμε τι σημαίνει αυτό.

Αναγωγή στο APSP.

Αρκεί να ανάγουμε στο

Αναγωγή στο APSP.

Αρκεί να ανάγουμε στο $(Min, +)$ γινόμενο.

Αναγωγή στο APSP.

Αρκεί να ανάγουμε στο $(Min, +)$ γινόμενο.

Υπενθύμιση. Δίνονται πίνακες $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έτσι ώστε

$$Z[i][j] = \min_{k=1}^{n} \{X[i][k] + Y[k][j]\} .$$

Θεώρημα. Αν υπάρχει αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για το APSP, τότε υπάρχει και αλγόριθμος χρόνου $O(n^{3/2} + \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}))$ για τη $(min, +)$ συνέλιξη.

Αναγωγή

1. Σπάμε το A σε $\sqrt{n}$ διαδοχικούς ισομηκείς πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ έτσι ώστε

$$A^{(i)} := [A[(i-1)\cdot\sqrt{n}], \ldots, A[i\cdot\sqrt{n}-1].$$

Αναγωγή

1. Σπάμε το A σε $\sqrt{n}$ διαδοχικούς ισομηκείς πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ έτσι ώστε
$$A^{(i)} := [A[(i-1)\cdot\sqrt{n}], \ldots, A[i\cdot\sqrt{n}-1]].$$

2. Φτιάχνουμε τον πίνακα X ο οποίος έχει γραμμές τα $A^{(i)}$.

Αναγωγή

1. Σπάμε το A σε $\sqrt{n}$ διαδοχικούς ισομηκείς πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ έτσι ώστε

$$A^{(i)} := [A[(i-1) \cdot \sqrt{n}], \ldots, A[i \cdot \sqrt{n} - 1].$$

2. Φτιάχνουμε τον πίνακα X ο οποίος έχει γραμμές τα $A^{(i)}$.
3. Έστω $B^{(j)} := [B[j], B[j-1], \ldots, B[j - \sqrt{n}]$ για $j \geq \sqrt{n}$.

Αναγωγή

1. Σπάμε το A σε $\sqrt{n}$ διαδοχικούς ισομηκείς πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ έτσι ώστε
$$A^{(i)} := [A[(i-1)\cdot\sqrt{n}], \ldots, A[i\cdot\sqrt{n}-1]].$$
2. Φτιάχνουμε τον πίνακα X ο οποίος έχει γραμμές τα $A^{(i)}$.
3. Έστω $B^{(j)} := [B[j], B[j-1], \ldots, B[j-\sqrt{n}]$ για $j \geq \sqrt{n}$.
4. Φτιάχνουμε τον πίνακα Y ο οποίος έχει ως στήλες τα $B^{(j)}$, τα οποία είναι $n-\sqrt{n}$ το πλήθος.

Αναγωγή

1. Σπάμε το A σε $\sqrt{n}$ διαδοχικούς ισομηκείς πίνακες $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ έτσι ώστε

$$A^{(i)} := [A[(i-1)\cdot\sqrt{n}], \ldots, A[i\cdot\sqrt{n}-1].$$

2. Φτιάχνουμε τον πίνακα X ο οποίος έχει γραμμές τα $A^{(i)}$.
3. Έστω $B^{(j)} := [B[j], B[j-1], \ldots, B[j-\sqrt{n}]$ για $j \geq \sqrt{n}$.
4. Φτιάχνουμε τον πίνακα Y ο οποίος έχει ως στήλες τα $B^{(j)}$, τα οποία είναι $n-\sqrt{n}$ το πλήθος.

$$\min_{k=1}^{\sqrt{n}}\{X[i][k]+Y[k][j]\} =$$
$$min_{k=1}^{\sqrt{n}}\{A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]\}$$

Ο όρος $A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]$ συνεισφέρει στο $(A\star B)[(i-1)\sqrt{n}+j]$ διότι

$$((i-1)\cdot\sqrt{n}+k)+(j-k)=(i-1)\cdot\sqrt{n}+j.$$

Αν είχαμε όλα τα $min_{k=1}^{\sqrt{n}}\left\{A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]\right\}$, θα μπορούσαμε σε χρόνο $O(\sqrt{n})$ να υπολογίσουμε όποια εγγραφή του $(A\star B)$ θέλουμε.
Χρόνος για να βρούμε όλα τα $A\star B$ γίνεται $O(n\sqrt{n})$.

Ο όρος $A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]$ συνεισφέρει στο $(A\star B)[(i-1)\sqrt{n}+j]$ διότι

$$((i-1)\cdot\sqrt{n}+k)+(j-k)=(i-1)\cdot\sqrt{n}+j.$$

Αν είχαμε όλα τα $min_{k=1}^{\sqrt{n}}\left\{A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]\right\}$, θα μπορούσαμε σε χρόνο $O(\sqrt{n})$ να υπολογίσουμε όποια εγγραφή του $(A\star B)$ θέλουμε.
Χρόνος για να βρούμε όλα τα $A\star B$ γίνεται $O(n\sqrt{n})$.

Έχουμε ανάγει το πρόβλημα σε ένα $(Min,+)$ πολλαπλασιασμό ενός $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ με έναν $\sqrt{n}\times(n-\sqrt{n})$ πίνακα.

Ο όρος $A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]$ συνεισφέρει στο $(A\star B)[(i-1)\sqrt{n}+j]$ διότι

$$((i-1)\cdot\sqrt{n}+k)+(j-k)=(i-1)\cdot\sqrt{n}+j.$$

Αν είχαμε όλα τα $min_{k=1}^{\sqrt{n}}\left\{A[(i-1)\cdot\sqrt{n}+k]+B[j-k]\right\}$, θα μπορούσαμε σε χρόνο $O(\sqrt{n})$ να υπολογίσουμε όποια εγγραφή του $(A\star B)$ θέλουμε.
Χρόνος για να βρούμε όλα τα $A\star B$ γίνεται $O(n\sqrt{n})$.

Έχουμε ανάγει το πρόβλημα σε ένα $(Min,+)$ πολλαπλασιασμό ενός $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ με έναν $\sqrt{n}\times(n-\sqrt{n})$ πίνακα.
Σπάμε τον δεύτερο σε $\sqrt{n}$ υποπίνακες, ομαδοποιώντας τις στήλες, και υπολογίζουμε $\sqrt{n}$ γινόμενα σε συνολικό χρόνο $\sqrt{n}\cdot T(n)$.

Αναγωγή στο Πρόβλημα Σακιδίου

Θα ασχοληθούμε την $(Max, +)$ συνέλιξη. Ορίζουμε τα προβλήματα

1. Μη φραγμένο πρόβλημα Σακιδίου: Ίδια κατάσταση με το πρόβλημα Σακιδίου, αλλά μπορούμε να διαλέξουμε κάθε αντικείμενο όσες φορές θέλουμε, δηλαδή S είναι *πολυσύνολο*.

Αναγωγή στο Πρόβλημα Σακιδίου

Θα ασχοληθούμε την $(Max, +)$ συνέλιξη. Ορίζουμε τα προβλήματα

1. Μη φραγμένο πρόβλημα Σακιδίου: Ίδια κατάσταση με το πρόβλημα Σακιδίου, αλλά μπορούμε να διαλέξουμε κάθε αντικείμενο όσες φορές θέλουμε, δηλαδή S είναι *πολυσύνολο*.
2. Έλεγχος υπερ-αθροιστικότητας ακολουθίας. Δίνεται ακολουθία $a[1], a[2], \ldots, a[n]$ και ζητείται να αποφασιστεί αν $a[k] \geq \max_{i+j=k} \{a[i] + a[j]\} \; \forall k$.

Αναγωγή στο Πρόβλημα Σακιδίου

Θα ασχοληθούμε την $(Max, +)$ συνέλιξη. Ορίζουμε τα προβλήματα

1. Μη φραγμένο πρόβλημα Σακιδίου: Ίδια κατάσταση με το πρόβλημα Σακιδίου, αλλά μπορούμε να διαλέξουμε κάθε αντικείμενο όσες φορές θέλουμε, δηλαδή S είναι *πολυσύνολο*.
2. Έλεγχος υπερ-αθροιστικότητας ακολουθίας. Δίνεται ακολουθία $a[1], a[2], \dots, a[n]$ και ζητείται να αποφασιστεί αν $a[k] \geq \max_{i+j=k} \{a[i] + a[j]\} \, \forall k$.
3. Πρόβλημα $(Max, +)$ Συνέλιξης με άνω φράγμα. Δίνονται διανύσματα A, B, C και ζητείται να βρεθεί αν $C[k] \geq \max_{i+j=k} \{A[i] + B[j]\}$.

$\star$ $(Max, +) \to$ Πρόβλημα 3 $\to$ Πρόβλημα 2 $\to$ Πρόβλημα 1 $\to$
$\to$ Πρόβλημα Σακιδίου.

Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.

Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα.

Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον έλεγχο υπερ-αθροιστικότητας ακολουθίας.

Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον έλεγχο υπερ-αθροιστικότητας ακολουθίας.
- Υπάρχει $(n + W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα του Μη Φραγμένου Σακιδίου.

Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα.
- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον έλεγχο υπερ-αθροιστικότητας ακολουθίας.
- Υπάρχει $(n + W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα του Μη Φραγμένου Σακιδίου.
- Υπάρχει $(n + W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα Σακιδίου.

Αναγωγή Μη φραγμένου Σακιδίου σε πρόβλημα Σακιδίου.

Έχω τα ζεύγη $(w_i, v_i)_{i\in[n]}$, και μπορώ να επιλέξω το καθένα πολλές φορές.
Ιδέα Ι: Τοποθετώ τα αντικείμενα $(w_i, v_i)(2w_i, 2_{v_i})(3w_i, 3v_i), \ldots$, και λύνω πρόβλημα Σακιδίου.

Αναγωγή Μη φραγμένου Σακιδίου σε πρόβλημα Σακιδίου.

Έχω τα ζεύγη $(w_i, v_i)_{i\in[n]}$, και μπορώ να επιλέξω το καθένα πολλές φορές.
Ιδέα Ι: Τοποθετώ τα αντικείμενα $(w_i, v_i)(2w_i, 2_{v_i})(3w_i, 3v_i), \ldots$, και λύνω πρόβλημα Σακιδίου.
Φτιάχνω έτσι μέχρι $O(W \cdot n)$ αντικείμενα, πολλά $\ldots$.

Αναγωγή Μη φραγμένου Σακιδίου σε πρόβλημα Σακιδίου.

Έχω τα ζεύγη $(w_i, v_i)_{i\in[n]}$, και μπορώ να επιλέξω το καθένα πολλές φορές.
Ιδέα Ι: Τοποθετώ τα αντικείμενα $(w_i, v_i)(2w_i, 2_{v_i})(3w_i, 3v_i), \ldots$, και λύνω πρόβλημα Σακιδίου.
Φτιάχνω έτσι μέχρι $O(W \cdot n)$ αντικείμενα, πολλά $\ldots$.

Βάζουμε για κάθε i τα αντικείμενα

$$(2w_i, 2v_i), (4w_i, 4v_i), (8w_i, 8v_i), \ldots,$$

και λύνουμε Πρόβλημα Σακιδίου στο καινούριο στιγμιότυπο.

Αναγωγή Μη φραγμένου Σακιδίου σε πρόβλημα Σακιδίου.

Έχω τα ζεύγη $(w_i, v_i)_{i\in[n]}$, και μπορώ να επιλέξω το καθένα πολλές φορές.
Ιδέα Ι: Τοποθετώ τα αντικείμενα $(w_i, v_i)(2w_i, 2_{v_i})(3w_i, 3v_i), \dots$, και λύνω πρόβλημα Σακιδίου.
Φτιάχνω έτσι μέχρι $O(W \cdot n)$ αντικείμενα, πολλά ....

Βάζουμε για κάθε i τα αντικείμενα

$$(2w_i, 2v_i), (4w_i, 4v_i), (8w_i, 8v_i), \dots,$$

και λύνουμε Πρόβλημα Σακιδίου στο καινούριο στιγμιότυπο.
Έτσι, έχω $n' = O(n \log W)$ αντικείμενα, και ένας $(n' + W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα Σακιδίου λύνει το πρόβλημα μη Φραγμένου Σακιδίου σε $(n \log W + W)^{2-\epsilon}$ χρόνο.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Υπενθύμιση: Να ελεγχθεί αν $a[i] + a[j] \leq a[i + j]$ για κάθε i, j.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Υπενθύμιση: Να ελεγχθεί αν $a[i] + a[j] \leq a[i + j]$ για κάθε i, j.

Λήμμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Υπενθύμιση: Να ελεγχθεί αν $a[i] + a[j] \leq a[i+j]$ για κάθε i, j.

Λήμμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη.
Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $a'[i] := a[i] + Ci$, η οποία για C αρκετά μεγάλο είναι μονότονη.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Υπενθύμιση: Να ελεγχθεί αν $a[i] + a[j] \leq a[i+j]$ για κάθε i, j.

Λήμμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη.
Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $a'[i] := a[i] + Ci$, η οποία για C αρκετά μεγάλο είναι μονότονη. Τότε

$$
\begin{aligned}
& a'[i] + a'[j] \leq a'[i+j] \iff \\
& (a[i] + Ci) + (a[j] + Cj) \leq a[i+j] + C(i+j) \iff \\
& a[i] + a[j] \leq a[i+j].
\end{aligned}
$$

'Αρα η ιδιότητα της υπερ-αθροιστικότητας παραμένει στην ακολουθία a'.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Για την ακολουθία $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ δημιουργούμε το στιγμιότυπο μη Φραγμένου Σακιδίου με $2n$ αντικείμενα $(i, a[i])_{0 \le i \le n-1}$ και $(2n-1-i, D-a[i])_{0 \le i \le n-1}$ όπου $D := \sum_{i=0}^{n-1} a[i] + 1$, και $W = 2n - 1$.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Για την ακολουθία $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ δημιουργούμε το στιγμιότυπο μη Φραγμένου Σακιδίου με $2n$ αντικείμενα $(i, a[i])_{0 \leq i \leq n-1}$ και $(2n-1-i, D-a[i])_{0 \leq i \leq n-1}$ όπου $D := \sum_{i=0}^{n-1} a[i] + 1$, και $W = 2n - 1$.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

Για την ακολουθία $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ δημιουργούμε το στιγμιότυπο μη Φραγμένου Σακιδίου με $2n$ αντικείμενα $(i, a[i])_{0 \leq i \leq n-1}$ και $(2n-1-i, D-a[i])_{0 \leq i \leq n-1}$ όπου $D := \sum_{i=0}^{n-1} a[i] + 1$, και $W = 2n-1$.

- Τιμή D είναι πάντα επιτεύξιμη.
- Αν τιμή $\geq D$ είναι επιτεύξιμη, τότε η ακολουθία δεν είναι υπερ-αθροιστική.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

1. Πάντα θα πάρουμε το πολύ ένα αντικείμενο της μορφής $(2n - 1 - i, D - a[i])$.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

1. Πάντα θα πάρουμε το πολύ ένα αντικείμενο της μορφής $(2n-1-i, D-a[i])$.
2. Αν η ακολουθία είναι υπεραθροιστική, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε αντικείμενα $(i, a[i])$ και $(j, a[j])$ με αντικείμενο $(i+j, a[i+j])$.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

1. Πάντα θα πάρουμε το πολύ ένα αντικείμενο της μορφής $(2n-1-i, D-a[i])$.
2. Αν η ακολουθία είναι υπεραθροιστική, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε αντικείμενα $(i, a[i])$ και $(j, a[j])$ με αντικείμενο $(i+j, a[i+j])$.
3. Άρα για υπεραθροιστικές ακολουθίες, η βέλτιστη λύση πάντα περιέχει ένα αντικείμενο της μορφής $(i, a[i])$, και το αντικείμενο $(2n-1-i, D-a[i])$ λόγω μονοτονικότητας.

Αναγωγή ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας σε Μη Φραγμένο Σακίδιο

1. Πάντα θα πάρουμε το πολύ ένα αντικείμενο της μορφής $(2n - 1 - i, D - a[i])$.
2. Αν η ακολουθία είναι υπεραθροιστική, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε αντικείμενα $(i, a[i])$ και $(j, a[j])$ με αντικείμενο $(i + j, a[i + j])$.
3. Άρα για υπεραθροιστικές ακολουθίες, η βέλτιστη λύση πάντα περιέχει ένα αντικείμενο της μορφής $(i, a[i])$, και το αντικείμενο $(2n - 1 - i, D - a[i])$ λόγω μονοτονικότητας.
4. Αν δεν είναι υπερ-αθροιστική, τότε υπάρχουν i, j ώστε $a[i] + a[j] > a[i + j]$. Τα αντικείμενα $(i, a[i]), (j, a[j]), (2n - 1 - (i + j), D - a[i] - a[j])$ έχουν τιμή που ξεπερνάει το D, ενώ παραμένουν έγκυρη λύση.

Μέχρι στιγμής

1. Το πρόβλημα μη Φραγμένου Σακιδίου ανάγεται σε σχεδόν γραμμικό χρόνο στο πρόβλημα Σακιδίου, αυξάνοντας το πλήθος των αντικειμένων κατά ένα παράγοντα $\log W$.

Μέχρι στιγμής

1. Το πρόβλημα μη Φραγμένου Σακιδίου ανάγεται σε σχεδόν γραμμικό χρόνο στο πρόβλημα Σακιδίου, αυξάνοντας το πλήθος των αντικειμένων κατά ένα παράγοντα $\log W$.
2. Το πρόβλημα ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας ανάγεται στο Μη Φραγμένο Σακίδιο σε γραμμικό χρόνο.

Μέχρι στιγμής

1. Το πρόβλημα μη Φραγμένου Σακιδίου ανάγεται σε σχεδόν γραμμικό χρόνο στο πρόβλημα Σακιδίου, αυξάνοντας το πλήθος των αντικειμένων κατά ένα παράγοντα $\log W$.
2. Το πρόβλημα ελέγχου υπερ-αθροιστικότητας ανάγεται στο Μη Φραγμένο Σακίδιο σε γραμμικό χρόνο.
3. Εν συνεχεία, θα ανάγουμε το πρόβλημα $(Max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα, στο πρόβλημα του μη Φραγμένου Σακιδίου.

Υπενθύμιση $(max, +)$ συνέλιξης. Έχουμε ακολουθίες A, B, C μήκους n και θέλουμε να αποφανθούμε αν για κάθε $i, j, i + j < n$ ισχύει $A[i] + B[j] > C[i + j]$.

Υπενθύμιση $(max, +)$ συνέλιξης. Έχουμε ακολουθίες A, B, C μήκους n και θέλουμε να αποφανθούμε αν για κάθε $i, j, i + j < n$ ισχύει $A[i] + B[j] > C[i + j]$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι A, B, C θετικά και μονότονες, με το μετασχηματισμό $A[i] \leftarrow A[i] + M \cdot i + M'$ (όμοια για B, C) όπου M, M' επαρκώς μεγάλοι αριθμοί.

Υπενθύμιση $(max, +)$ συνέλιξης. Έχουμε ακολουθίες A, B, C μήκους n και θέλουμε να αποφανθούμε αν για κάθε $i, j, i + j < n$ ισχύει $A[i] + B[j] > C[i + j]$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι A, B, C θετικά και μονότονες, με το μετασχηματισμό $A[i] \leftarrow A[i] + M \cdot i + M'$ (όμοια για B, C) όπου M, M' επαρκώς μεγάλοι αριθμοί.

Κατασκευάζουμε ακολουθία e μήκους $4n$, η οποία για $0 \leq i \leq n - 1$ ικανοποιεί

- $e[i] = 0$
- $e[n + i] = K + A[i]$
- $e[2n + i] = 4K + B[i]$
- $e[3n + i] = 5K + C[i]$,

όπου K επαρκώς μεγάλος αριθμός.

Ισχυρισμός Ι. Αν e είναι υπερ-αθροιστική, τότε η απάντητη στο πρόβλημα $(max, +)$ συνέλιξης είναι θετική.

Ισχυρισμός Ι. Αν e είναι υπερ-αθροιστική, τότε η απάντητη στο πρόβλημα $(max, +)$ συνέλιξης είναι θετική.

Για κάθε $i, j, i + j < n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&e[n+i] + e[2n+j] \leq e[(n+i) + (2n+j)] \iff \\
&(K + A[i]) + (4K + B[j]) \leq (5K + C[i+j]) \iff \\
&A[i] + B[j] \leq C[i+j]
\end{aligned}
$$

Ισχυρισμός ΙΙ. Αν η απάντηση στο πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα είναι θετική, τότε η e είναι υπερ-αθροιστική.

Ισχυρισμός II. Αν η απάντηση στο πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα είναι θετική, τότε η e είναι υπερ-αθροιστική.

Λόγω του αριθμού K, κάθε ανίσωση της μορφής $e[n+i] + e[n+j] \geq e[2n+j]$ με $0 \leq i \leq n-1$, ισχύει τετριμμένα. Για τα υπόλοιπα ζεύγη έχουμε ξανά

$$
\begin{aligned}
&e[n+i] + e[2n+j] \geq e[(n+i) + (2n+j)] \iff \\
&(K + A[i]) + (4K + B[j]) \leq (5K + C[i+j]) \iff \\
&A[i] + B[j] \leq C[i+j]
\end{aligned}
$$

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Ας υποθέσουμε για αρχή ότι στο πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα πρέπει να επιστρέψουμε και ένα ζεύγος (i, j) έτσι ώστε

$$A[i] + B[j] > C[i + j],$$

αν αυτό υπάρχει[2]. Έστω αλγόριθμος $T(n)$ γι αυτό το πρόβλημα.

[2] Στη δεύτερη σειρά ασκήσεων θα δούμε την αναγωγή.

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Ας υποθέσουμε για αρχή ότι στο πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα πρέπει να επιστρέψουμε και ένα ζεύγος (i, j) έτσι ώστε

$$A[i] + B[j] > C[i + j],$$

αν αυτό υπάρχει[2]. Έστω αλγόριθμος $T(n)$ γι αυτό το πρόβλημα.

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε όλα τα *παραβιασμένα* k για τα οποία υπάρχουν i, j με $i+j = k$ και $A[i]+B[j] > C[k]$ σε χρόνο $O(T(\sqrt{n}) \cdot n \log n)$.

[2] Στη δεύτερη σειρά ασκήσεων θα δούμε την αναγωγή.

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Ας υποθέσουμε για αρχή ότι στο πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα πρέπει να επιστρέψουμε και ένα ζεύγος (i, j) έτσι ώστε

$$A[i] + B[j] > C[i + j],$$

αν αυτό υπάρχει[2]. Έστω αλγόριθμος $T(n)$ γι αυτό το πρόβλημα.

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε όλα τα *παραβιασμένα* k για τα οποία υπάρχουν i, j με $i+j = k$ και $A[i]+B[j] > C[k]$ σε χρόνο $O(T(\sqrt{n}) \cdot n \log n)$.

[2] Στη δεύτερη σειρά ασκήσεων θα δούμε την αναγωγή.

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Σπάμε τα A, B σε $\sqrt{n}$ ακολουθίες μήκους $\approx \sqrt{n}$, έστω $\{A^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}, \{B^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}$.

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Σπάμε τα A, B σε $\sqrt{n}$ ακολουθίες μήκους $\approx \sqrt{n}$, έστω $\{A^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}, \{B^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}$.

Επεξεργαζόμαστε τα υποπροβλήματα $(A^{(i)}, B^{(j)})$ κατά σειρά. Λύνουμε το πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα για το στιγμιότυπο $(A^{(i)}, B^{(j)})$ (μεταφέροντας τους δείκτες των πινάκων στο 0). Αν ο αλγόριθμος γυρίσει το παραβιασμένο k, θέτουμε $C[k] = \infty$, και συνεχίζουμε να επεξεργαζόμαστε το ίδιο ζεύγος. Όταν η απάντηση στο πρόβλημα είναι 'ΝΑΙ', περνάμε στο επόμενο υποπρόβλημα.

Λίγη ακόμα προετοιμασία της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα

Σπάμε τα A, B σε $\sqrt{n}$ ακολουθίες μήκους $\approx \sqrt{n}$, έστω $\{A^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}, \{B^{(i)}\}_{i=1}^{\sqrt{n}}$.

Επεξεργαζόμαστε τα υποπροβλήματα $(A^{(i)}, B^{(j)})$ κατά σειρά. Λύνουμε το πρόβλημα της $(max, +)$ συνέλιξης με άνω φράγμα για το στιγμιότυπο $(A^{(i)}, B^{(j)})$ (μεταφέροντας τους δείκτες των πινάκων στο 0). Αν ο αλγόριθμος γυρίσει το παραβιασμένο k, θέτουμε $C[k] = \infty$, και συνεχίζουμε να επεξεργαζόμαστε το ίδιο ζεύγος. Όταν η απάντηση στο πρόβλημα είναι 'ΝΑΙ', περνάμε στο επόμενο υποπρόβλημα.

Πλήθος παραβιάσεων: $O(n)$.
Συνολικός Χρόνος: (πλήθος παραβιάσεων) $\cdot T(\sqrt{n}) = O(nT(\sqrt{n}))$.

Αναγωγή της $(max, +)$ συνέλιξης στη $(max, +)$ συνέλιξη με άνω φράγμα.

Ταυτόχρονη δυαδική αναζήτηση!

Αναγωγή της $(max, +)$ συνέλιξης στη $(max, +)$ συνέλιξη με άνω φράγμα.

Ταυτόχρονη δυαδική αναζήτηση!Έστω ότι $0 \leq A[i], B[i] \leq W$. Φτιάχνουμε τον πίνακα $C[i] = \frac{W}{2}$, και τρέχουμε το πρόβλημα της $(max, +)$ με άνω φράγμα για να βρούμε όλα τα k για τα οποία

$$\exists i, j : i + j = k \bigwedge A[i] + B[j] > C[k].$$

Γι αυτά τα k θέτουμε $C[k] = \frac{3W}{4}$, και για όλα τα υπόλοιπα θέτουμε $C[k] = \frac{W}{4}$, και ούτω καθεξής.

Αναγωγή της $(max, +)$ συνέλιξης στη $(max, +)$ συνέλιξη με άνω φράγμα.

Ταυτόχρονη δυαδική αναζήτηση!Έστω ότι $0 \leq A[i], B[i] \leq W$. Φτιάχνουμε τον πίνακα $C[i] = \frac{W}{2}$, και τρέχουμε το πρόβλημα της $(max, +)$ με άνω φράγμα για να βρούμε όλα τα k για τα οποία

$$\exists i, j : i + j = k \bigwedge A[i] + B[j] > C[k].$$

Γι αυτά τα k θέτουμε $C[k] = \frac{3W}{4}$, και για όλα τα υπόλοιπα θέτουμε $C[k] = \frac{W}{4}$, και ούτω καθεξής.

Θεώρημα. Αν $(max, +)$ συνέλιξη σε χρόνο $T(n)$, τότε $(max, +)$ συνέλιξη σε χρόνο $O(n \cdot T(\sqrt{n}) \log W)$.

Ανακεφαλαίωση: Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

Μαζί με την αναγωγή του προβλήματος Σακιδίου στη $(max, +)$ συνέλιξη (πιθανή παρουσίαση στο τέλος από κάποιον φοιτητή ;) έχουμε.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.

Ανακεφαλαίωση: Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

Μαζί με την αναγωγή του προβλήματος Σακιδίου στη $(max, +)$ συνέλιξη (πιθανή παρουσίαση στο τέλος από κάποιον φοιτητή ;) έχουμε.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $(n+W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα του Μη Φραγμένου Σακιδίου.

Ανακεφαλαίωση: Οι κατώθι δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

Μαζί με την αναγωγή του προβλήματος Σακιδίου στη $(max, +)$ συνέλιξη (πιθανή παρουσίαση στο τέλος από κάποιον φοιτητή ;) έχουμε.

- Υπάρχει $n^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $(min, +)$ συνέλιξης.
- Υπάρχει $(n+W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα του Μη Φραγμένου Σακιδίου.
- Υπάρχει $(n+W)^{2-\epsilon}$ αλγόριθμος για το πρόβλημα Σακιδίου.

Ευχαριστούμε!