Μάθημα Όγδοο

Άρης Παγουρτζής, Βασίλης Νάκος   ΑΛΜΑ

Προηγούμενο Μάθημα

Πολλαπλασιασμός πινάκων Booole και εντοπισμός τριγώνου σε γράφημα.

Προηγούμενο Μάθημα

Πολλαπλασιασμός πινάκων Booole και εντοπισμός τριγώνου σε γράφημα.

Εντοπισμός κύκλου μήκους $k \geq 4$ σε γράφημα.

Κύκλοι μήκους $k \geq 4$

Θεμελιώδες πρόβλημα στην αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων.

Ο καλύτερος αλγόριθμος εντοπισμό τριγώνου είναι σε χρόνο $\approx n^\omega$ (ισοδυναμία με πολλαπλασιασμό πινάκων Boole).

Κύκλοι μήκους $k \geq 4$

Θεμελιώδες πρόβλημα στην αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων.

Ο καλύτερος αλγόριθμος εντοπισμό τριγώνου είναι σε χρόνο $\approx n^\omega$ (ισοδυναμία με πολλαπλασιασμό πινάκων Boole).

Βασική ερώτηση: Ο εντοπισμός κύκλων μήκους 4 τι σχέση έχει με εντοπισμό τριγώνων (σε κατευθυνόμενα ή μη κατευθυνόμενα γραφήματα); Μήκους 5;

Υπενθύμιση αλγόριθμου για εύρεση τριγώνου

Έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα G και έστω $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ ο πίνακας γειτνίασης του G. Ας κοιτάξουμε τον A^3 τότε

Υπενθύμιση αλγόριθμου για εύρεση τριγώνου

Έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα G και έστω $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ ο πίνακας γειτνίασης του G. Ας κοιτάξουμε τον A^3 τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{i',j'} \left(A[i,i'] \wedge A[i',j'] \wedge A[j',j]\right).$$

Υπενθύμιση αλγόριθμου για εύρεση τριγώνου

Έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα G και έστω $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ ο πίνακας γειτνίασης του G. Ας κοιτάξουμε τον A^3 τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{i',j'} \left(A[i,i'] \wedge A[i',j'] \wedge A[j',j]\right).$$

Υπάρχει τρίγωνο αν και μόνο αν υπάρχει i ώστε $A[i,i] = 1$.

Υπενθύμιση αλγόριθμου για εύρεση τριγώνου

Έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα G και έστω $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ ο πίνακας γειτνίασης του G. Ας κοιτάξουμε τον A^3 τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{i',j'} \left(A[i,i'] \wedge A[i',j'] \wedge A[j',j]\right).$$

Υπάρχει τρίγωνο αν και μόνο αν υπάρχει i ώστε $A[i,i] = 1$.

Τι με εμποδίζει αν για $k \geq 4$ κοιτάξω τα $A^k[i,j]$;

Υπενθύμιση αλγόριθμου για εύρεση τριγώνου

Έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα G και έστω $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ ο πίνακας γειτνίασης του G. Ας κοιτάξουμε τον A^3 τότε

$$A^3[i,j] = \bigvee_{i',j'} \left(A[i,i'] \wedge A[i',j'] \wedge A[j',j]\right).$$

Υπάρχει τρίγωνο αν και μόνο αν υπάρχει i ώστε $A[i,i] = 1$.

Τι με εμποδίζει αν για $k \geq 4$ κοιτάξω τα $A^k[i,j]$; Βρίσκω περίπατους μήκους k από το i στο $i \neq$ κύκλους μήκους k.

Χρωματική Κωδικοποίηση

Βασική τεχνική στη Θεωρία Αλγορίθμων και Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.

Χρωματική Κωδικοποίηση

Βασική τεχνική στη Θεωρία Αλγορίθμων και Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.
Εφευρεύθηκε το 1994 από Alon, Yuster, Zwick, με σκοπό την επίλυση ενός ανοικτού ερωτήματος από Παπαδημητρίου και Γιαννακάκη πάνω στο πρόβλημα του μονοπατιού μήκους $O(\log n)$ σε γράφημα με n κορυφές.

Χρωματική Κωδικοποίηση

Βασική τεχνική στη Θεωρία Αλγορίθμων και Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.
Εφευρεύθηκε το 1994 από Alon, Yuster, Zwick, με σκοπό την επίλυση ενός ανοικτού ερωτήματος από Παπαδημητρίου και Γιαννακάκη πάνω στο πρόβλημα του μονοπατιού μήκους $O(\log n)$ σε γράφημα με n κορυφές.

Ιδέα: Χρωματίζω *στην τύχη* το γράφημα μου με k χρώματα. Λύνω το προβλημά μου πάνω στις διαφορετικές χρωματικές κλάσεις.

Χρωματική Κωδικοποίηση

Βασική τεχνική στη Θεωρία Αλγορίθμων και Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.
Εφευρεύθηκε το 1994 από Alon, Yuster, Zwick, με σκοπό την επίλυση ενός ανοικτού ερωτήματος από Παπαδημητρίου και Γιαννακάκη πάνω στο πρόβλημα του μονοπατιού μήκους $O(\log n)$ σε γράφημα με n κορυφές.

Ιδέα: Χρωματίζω *στην τύχη* το γράφημα μου με k χρώματα. Λύνω το προβλημά μου πάνω στις διαφορετικές χρωματικές κλάσεις.

Επαναλαμβάνω ‘αρκετές’ φορές τον τυχαίο χρωματισμό.

Χρωματική Κωδικοποίηση

Βασική τεχνική στη Θεωρία Αλγορίθμων και Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.
Εφευρεύθηκε το 1994 από Alon, Yuster, Zwick, με σκοπό την επίλυση ενός ανοικτού ερωτήματος από Παπαδημητρίου και Γιαννακάκη πάνω στο πρόβλημα του μονοπατιού μήκους $O(\log n)$ σε γράφημα με n κορυφές.

Ιδέα: Χρωματίζω *στην τύχη* το γράφημα μου με k χρώματα. Λύνω το προβλημά μου πάνω στις διαφορετικές χρωματικές κλάσεις.

Επαναλαμβάνω ‘αρκετές’ φορές τον τυχαίο χρωματισμό.
Ιδιαίτερα ισχυρό σε προβλήματα με μονοπάτια, κύκλους, κλπ.

Τι συμβαίνει αν χρωματίσω στην τύχη ένα γράφημα με k χρώματα;

Έστω $P := v_1, v_2, \ldots, v_k$ ένα μονοπάτι μήκους k. Τότε

$$\forall 1 \leq i \leq k, \mathbb{P}\left\{\mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k},$$

και

Τι συμβαίνει αν χρωματίσω στην τύχη ένα γράφημα με k χρώματα;

Έστω $P := v_1, v_2, \ldots, v_k$ ένα μονοπάτι μήκους k. Τότε

$$\forall 1 \leq i \leq k, \mathbb{P}\left\{\mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k},$$

και

$$\mathbb{P}\left\{\forall 1 \leq i \leq k, \mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k^k}$$

Τι συμβαίνει αν χρωματίσω στην τύχη ένα γράφημα με k χρώματα;

Έστω $P := v_1, v_2, \dots, v_k$ ένα μονοπάτι μήκους k. Τότε

$$\forall 1 \le i \le k, \mathbb{P}\left\{\mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k},$$

και

$$\mathbb{P}\left\{\forall 1 \le i \le k, \mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k^k}$$

Μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς, ένα μονοπάτι μήκους k θα χρωματιστεί με τα χρώματα $1, 2, \dots, k$ διαδοχικά.

Τι συμβαίνει αν χρωματίσω στην τύχη ένα γράφημα με k χρώματα;

Έστω $P := v_1, v_2, \ldots, v_k$ ένα μονοπάτι μήκους k. Τότε

$$\forall 1 \leq i \leq k, \mathbb{P}\left\{\mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k},$$

και

$$\mathbb{P}\left\{\forall 1 \leq i \leq k, \mathrm{color}(v_i) = i\right\} = \frac{1}{k^k}$$

Μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς, ένα μονοπάτι μήκους k θα χρωματιστεί με τα χρώματα $1, 2, \ldots, k$ διαδοχικά. Άρα ;

Πως εκμεταλλευόμαστε έναν τέτοιο χρωματισμό.

Έστω ο πίνακας A_ℓ, ο οποίος έχει την εγγραφή $A_\ell[i, j] = 1$ αν και μόνο αν (i, j) ακμή στο γράφημα και $\mathrm{color}(i) = \ell$ και $\mathrm{color}(j) = \ell + 1$. Εναλλακτικά, A_ℓ είναι ο πείνακας γειτνίασης ανάμεσα στις χρωματικές κλάσεις ℓ και $\ell + 1$.

Πως εκμεταλλευόμαστε έναν τέτοιο χρωματισμό.

Έστω ο πίνακας A_ℓ, ο οποίος έχει την εγγραφή $A_\ell[i,j] = 1$ αν και μόνο αν (i,j) ακμή στο γράφημα και $\mathrm{color}(i) = \ell$ και $\mathrm{color}(j) = \ell + 1$. Εναλλακτικά, A_ℓ είναι ο πείνακας γειτνίασης ανάμεσα στις χρωματικές κλάσεις ℓ και $\ell + 1$.

Ας κοιτάξουμε το γινόμενο Boole

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_{k-1}.$$

Πως εκμεταλλευόμαστε έναν τέτοιο χρωματισμό.

Έστω ο πίνακας A_ℓ, ο οποίος έχει την εγγραφή $A_\ell[i,j] = 1$ αν και μόνο αν (i,j) ακμή στο γράφημα και $\mathrm{color}(i) = \ell$ και $\mathrm{color}(j) = \ell + 1$. Εναλλακτικά, A_ℓ είναι ο πείνακας γειτνίασης ανάμεσα στις χρωματικές κλάσεις ℓ και $\ell + 1$.

Ας κοιτάξουμε το γινόμενο Boole

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_{k-1}.$$

Η εγγραφή $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}[i,j]$ είναι 1 αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι με αρχή το i, το οποίο είναι στην πρώτη χρωματική κλάση, και εν συνεχεία περνάει από την δεύτερη χρωματική κλάση, μετά από τη τρίτη, και ούτω καθεξής, εώς ότου καταλήξει στο j.

Όντως, έχουμε ότι

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{k-1}[i,j] = \bigvee_{i_2,i_3,\dots,i_{k-1}} A_1[i,i_2] \wedge A_2[i_2,i_3] \wedge \dots \wedge A_{k-1}[i_{k-1},j].$$

Όντως, έχουμε ότι

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{k-1}[i,j] = \bigvee_{i_2, i_3, \dots, i_{k-1}} A_1[i, i_2] \wedge A_2[i_2, i_3] \wedge \dots \wedge A_{k-1}[i_{k-1}, j].$$

Προσέξτε ότι όλοι οι όροι στο από πάνω $\bigvee$ είναι πιθανές ακμές ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρωματικές κλάσεις.

Όντως, έχουμε ότι

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{k-1}[i,j] = \bigvee_{i_2, i_3, \dots, i_{k-1}} A_1[i, i_2] \wedge A_2[i_2, i_3] \wedge \dots \wedge A_{k-1}[i_{k-1}, j].$$

Προσέξτε ότι όλοι οι όροι στο από πάνω $\bigvee$ είναι πιθανές ακμές ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρωματικές κλάσεις.

Έχοντας το παραπάνω γινόμενο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί σε $O(k \cdot n^{\omega})$ χρόνο, απλά για κάθε ακμή (i, j) με $\mathrm{color}(i) = 1$ και $\mathrm{color}(j) = k$ κοιτάμε αν $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots A_{k-1})[i, j] = 1$.

Όντως, έχουμε ότι

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{k-1}[i,j] = \bigvee_{i_2, i_3, \ldots, i_{k-1}} A_1[i, i_2] \wedge A_2[i_2, i_3] \wedge \ldots \wedge A_{k-1}[i_{k-1}, j].$$

Προσέξτε ότι όλοι οι όροι στο από πάνω $\bigvee$ είναι πιθανές ακμές ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρωματικές κλάσεις.

Έχοντας το παραπάνω γινόμενο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί σε $O(k \cdot n^\omega)$ χρόνο, απλά για κάθε ακμή (i,j) με $\mathrm{color}(i) = 1$ και $\mathrm{color}(j) = k$ κοιτάμε αν $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_{k-1})[i,j] = 1$.

Αν ο χρωματισμός μας χρωματίζει τον πιθανό κύκλο μήκους k όπως αναφέραμε, τότε τελειώσαμε σε $O(k^{k+1} \cdot n^\omega)$ χρόνο. Για $k = O(1)$, χρόνος $O(n^\omega)$, όπως ο εντοπισμός τριγώνου!

Μέχρι στιγμής

Είδαμε ουσιαστικά μια αναγωγή του εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενα γραφήματα στον πολλαπλασιασμό πινάκων Boole, και άρα και στον εντοπισμό τριγώνου.

Μέχρι στιγμής

Είδαμε ουσιαστικά μια αναγωγή του εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενα γραφήματα στον πολλαπλασιασμό πινάκων Boole, και άρα και στον εντοπισμό τριγώνου.

Ερώτηση. Μπορούμε να λύσουμε τον πρόβλημα εντοπισμού κύκλου μήκους k γρηγορότερα από τον εντοπισμό τριγώνου; Μπορούμε να δείξουμε κάποια ισοδυναμία·

Απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.

Απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το $k = O(1)$ είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.

Απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το $k = O(1)$ είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
3. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το $k = O(1)$ είναι άρτιο τότε το πρόβλημα είναι ευκολότερο!

Απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το $k = O(1)$ είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
3. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το $k = O(1)$ είναι άρτιο τότε το πρόβλημα είναι ευκολότερο!
4. Το πρόβλημα εύρεσης του μήκους του ελάχιστου κύκλου είναι ισοδύναμο με τον εντοπισμό τριγώνου!

Θεώρημα. Για κάθε σταθερά $k \geq 3$, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενα γραφήματα, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $O(T(O(n)))$ για τον εντοπισμό τριγώνου.

[1] Θυμηθείτε ότι τα προβλήματα εντοπισμού τριγώνου σε τριμερή και γενικό γράφο είναι ισοδύναμα.

Θεώρημα. Για κάθε σταθερά $k \geq 3$, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατεθυνόμενα γραφήματα, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $O(T(O(n)))$ για τον εντοπισμό τριγώνου.

Έστω $G = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E)$ ένας τριμερής γράφος[1], με $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$, στον οποίο θέλουμε να βρούμε ένα τρίγωνο.

[1] Θυμηθείτε ότι τα προβλήματα εντοπισμού τριγώνου σε τριμερή και γενικό γράφο είναι ισοδύναμα.

Θεώρημα. Για κάθε σταθερά $k \geq 3$, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατεθυνόμενα γραφήματα, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $O(T(O(n)))$ για τον εντοπισμό τριγώνου.

Έστω $G = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E)$ ένας τριμερής γράφος[1], με $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$, στον οποίο θέλουμε να βρούμε ένα τρίγωνο. Θα κατασκευάσουμε ένα γράφο G' με $O(kn)$ κορυφές.

[1] Θυμηθείτε ότι τα προβλήματα εντοπισμού τριγώνου σε τριμερή και γενικό γράφο είναι ισοδύναμα.

Θεώρημα. Για κάθε σταθερά $k \geq 3$, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατεθυνόμενα γραφήματα, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $O(T(O(n)))$ για τον εντοπισμό τριγώνου.

Έστω $G = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E)$ ένας τριμερής γράφος[1], με $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$, στον οποίο θέλουμε να βρούμε ένα τρίγωνο. Θα κατασκευάσουμε ένα γράφο G' με $O(kn)$ κορυφές.
Θέλουμε να μεταμορφώσουμε ένα τρίγωνο σε ένα κύκλο, άρα

[1]Θυμηθείτε ότι τα προβλήματα εντοπισμού τριγώνου σε τριμερή και γενικό γράφο είναι ισοδύναμα.

Θεώρημα. Για κάθε σταθερά $k \geq 3$, αν υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $T(n)$ για εντοπισμού κύκλου μήκους k σε κατεθυνόμενα γραφήματα, τότε υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου $O(T(O(n)))$ για τον εντοπισμό τριγώνου.

Έστω $G = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E)$ ένας τριμερής γράφος[1], με $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$, στον οποίο θέλουμε να βρούμε ένα τρίγωνο. Θα κατασκευάσουμε ένα γράφο G' με $O(kn)$ κορυφές.
Θέλουμε να μεταμορφώσουμε ένα τρίγωνο σε ένα κύκλο, άρα εν αρχή φτιάχνουμε το σύνολο κορυφών

$$V_1' \cup V_2' \cup V_{3,1}' \cup \dots V_{3,k-2}'.$$

[1]Θυμηθείτε ότι τα προβλήματα εντοπισμού τριγώνου σε τριμερή και γενικό γράφο είναι ισοδύναμα.

Σύνολο κορυφών $V'_1 \cup V'_2 \cup V'_{3,1} \cup \ldots V'_{3,k-2}$, το οποίο είναι ένα αντίγραφο του V_1, ένα αντίγραφο του V_2, και $k-2$ αντίγραφα του V_3.

- Οι ακμές ανάμεσα στα V'_1, V'_2 είναι ίδιες με αυτές ανάμεσα στα V_1, V_2.

Σύνολο κορυφών $V_1' \cup V_2' \cup V_{3,1}' \cup \ldots V_{3,k-2}'$, το οποίο είναι ένα αντίγραφο του V_1, ένα αντίγραφο του V_2, και $k-2$ αντίγραφα του V_3.

- Οι ακμές ανάμεσα στα V_1', V_2' είναι ίδιες με αυτές ανάμεσα στα V_1, V_2.
- Βάζουμε ακμές από το V_1' στο $V_{3,1}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_1 στο V_3.

Σύνολο κορυφών $V_1' \cup V_2' \cup V_{3,1}' \cup \ldots V_{3,k-2}'$, το οποίο είναι ένα αντίγραφο του V_1, ένα αντίγραφο του V_2, και $k-2$ αντίγραφα του V_3.

- Οι ακμές ανάμεσα στα V_1', V_2' είναι ίδιες με αυτές ανάμεσα στα V_1, V_2.
- Βάζουμε ακμές από το V_1' στο $V_{3,1}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_1 στο V_3.
- Βάζουμε ακμές από το V_2' στο $V_{3,k-2}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_2 στο V_3.

Σύνολο κορυφών $V_1' \cup V_2' \cup V_{3,1}' \cup \ldots V_{3,k-2}'$, το οποίο είναι ένα αντίγραφο του V_1, ένα αντίγραφο του V_2, και $k-2$ αντίγραφα του V_3.

- Οι ακμές ανάμεσα στα V_1', V_2' είναι ίδιες με αυτές ανάμεσα στα V_1, V_2.
- Βάζουμε ακμές από το V_1' στο $V_{3,1}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_1 στο V_3.
- Βάζουμε ακμές από το V_2' στο $V_{3,k-2}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_2 στο V_3.
- Για κάθε $i \leq k-3$, και κάθε $u \in V_{3,i}$ βάζουμε ακμή από το u στο αντίστοιχο του στο $V_{3,i+1}$.

Σύνολο κορυφών $V_1' \cup V_2' \cup V_{3,1}' \cup \ldots V_{3,k-2}'$, το οποίο είναι ένα αντίγραφο του V_1, ένα αντίγραφο του V_2, και $k-2$ αντίγραφα του V_3.

- Οι ακμές ανάμεσα στα V_1', V_2' είναι ίδιες με αυτές ανάμεσα στα V_1, V_2.
- Βάζουμε ακμές από το V_1' στο $V_{3,1}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_1 στο V_3.
- Βάζουμε ακμές από το V_2' στο $V_{3,k-2}'$ αντίστοιχα με αυτές που είναι από το V_2 στο V_3.
- Για κάθε $i \leq k-3$, και κάθε $u \in V_{3,i}$ βάζουμε ακμή από το u στο αντίστοιχο του στο $V_{3,i+1}$.

Η αναγωγή είναι άμεση από την κατασκευή.

Θεώρημα. Έστω $k = O(1)$ περιττός. Ο εντοπισμός κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενο γράφημα ανάγεται στον εντοπισμό κύκλο μήκους k σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Θεώρημα. Έστω $k = O(1)$ περιττός. Ο εντοπισμός κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενο γράφημα ανάγεται στον εντοπισμό κύκλο μήκους k σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Ξανά, χρωματική κωδικοποίηση: χρωματίζουμε το γράφημα με k χρώματα, και έτσι μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς ο επίμαχος κύκλος έχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, k$.

Θεώρημα. Έστω $k = O(1)$ περιττός. Ο εντοπισμός κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενο γράφημα ανάγεται στον εντοπισμό κύκλο μήκους k σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Ξανά, χρωματική κωδικοποίηση: χρωματίζουμε το γράφημα με k χρώματα, και έτσι μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς ο επίμαχος κύκλος έχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, k$.
Αυτό μας δίνει ένα γράφημα με k στρώματα (ένα για κάθε χρωματική κλάση), έτσι ώστε οι ακμές να είναι μόνο μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου στρώματος.

Θεώρημα. Έστω $k = O(1)$ περιττός. Ο εντοπισμός κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενο γράφημα ανάγεται στον εντοπισμό κύκλο μήκους k σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Ξανά, χρωματική κωδικοποίηση: χρωματίζουμε το γράφημα με k χρώματα, και έτσι μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς ο επίμαχος κύκλος έχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, k$.
Αυτό μας δίνει ένα γράφημα με k στρώματα (ένα για κάθε χρωματική κλάση), έτσι ώστε οι ακμές να είναι μόνο μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου στρώματος. Εν συνεχεία, Αφαιρούμε την κατεύθυνση των ακμών, παίρνοντας το G'.

Θεώρημα. Έστω $k = O(1)$ περιττός. Ο εντοπισμός κύκλου μήκους k σε κατευθυνόμενο γράφημα ανάγεται στον εντοπισμό κύκλο μήκους k σε μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Ξανά, χρωματική κωδικοποίηση: χρωματίζουμε το γράφημα με k χρώματα, και έτσι μετά από $O(k^k)$ χρωματισμούς ο επίμαχος κύκλος έχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, k$.
Αυτό μας δίνει ένα γράφημα με k στρώματα (ένα για κάθε χρωματική κλάση), έτσι ώστε οι ακμές να είναι μόνο μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου στρώματος. Εν συνεχεία, Αφαιρούμε την κατεύθυνση των ακμών, παίρνοντας το G'.

Ισχυρισμός. Ο G έχει κύκλο μήκους k, αν και μόνο αν ο G' έχει κύκλο μήκους k.

Κατεύθυνση 1. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G, τότε υπάρχει και στο G'.

Κατεύθυνση 1. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G, τότε υπάρχει και στο G'.

Κατεύθυνση 2. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G', τότε αυτός ο κύκλος πρέπει να έχει έναν κόμβο σε κάθε μέρος του G' (χρωματική κλάση).

Κατεύθυνση 1. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G, τότε υπάρχει και στο G'.

Κατεύθυνση 2. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G', τότε αυτός ο κύκλος πρέπει να έχει έναν κόμβο σε κάθε μέρος του G' (χρωματική κλάση).Εφόσον αυτός ο κύκλος περνάει από κάθε στρώμα του G', μπορεί να επεκταθεί άμεσα σε έναν κύκλο για το G.

Κατεύθυνση 1. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G, τότε υπάρχει και στο G'.

Κατεύθυνση 2. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G', τότε αυτός ο κύκλος πρέπει να έχει έναν κόμβο σε κάθε μέρος του G' (χρωματική κλάση).Εφόσον αυτός ο κύκλος περνάει από κάθε στρώμα του G', μπορεί να επεκταθεί άμεσα σε έναν κύκλο για το G.

Όντως, αν ένας κύκλος μήκους k δεν περνάει από κάποιο στρώμα V_i στο G', τότε θα είχαμε έναν κύκλο περιττού μήκους στο $G' \setminus V_i$, άτοπο γιατί το $G' \setminus V_i$ είναι διμερές.

Κατεύθυνση 1. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G, τότε υπάρχει και στο G'.

Κατεύθυνση 2. Αν υπάρχει κύκλος μήκους k στο G', τότε αυτός ο κύκλος πρέπει να έχει έναν κόμβο σε κάθε μέρος του G' (χρωματική κλάση).Εφόσον αυτός ο κύκλος περνάει από κάθε στρώμα του G', μπορεί να επεκταθεί άμεσα σε έναν κύκλο για το G.

Όντως, αν ένας κύκλος μήκους k δεν περνάει από κάποιο στρώμα V_i στο G', τότε θα είχαμε έναν κύκλο περιττού μήκους στο $G' \setminus V_i$, άτοπο γιατί το $G' \setminus V_i$ είναι διμερές.

Να πως χρησιμοποιήσαμε τη γνώση για την περιττότητα του k!

Αποτυχαιοποίηση της χρωματικής κωδικοποίησης

Οι παραπάνω αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τυχαιότητα. Μπορούμε να τους κάνουμε ντετερμινιστικούς;

Αποτυχαιοποίηση της χρωματικής κωδικοποίησης

Οι παραπάνω αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τυχαιότητα. Μπορούμε να τους κάνουμε ντετερμινιστικούς;

Θεώρημα. Υπάρχει μία οικογένεια σύνολο $O(2^{O(k)} \log |V|)$ χρωματισμών, έτσι ώστε κάθε σύνολο $S \subseteq V, |S| = k$ να παίρνει *διαφορετικό* χρώμα. Η οικογένεια αυτή είναι υπολογίσιμη σε χρόνο $O(2^{O(k)} \cdot |V| \log |V|)$.

Αποτυχαιοποίηση της χρωματικής κωδικοποίησης

Οι παραπάνω αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τυχαιότητα. Μπορούμε να τους κάνουμε ντετερμινιστικούς;

Θεώρημα. Υπάρχει μία οικογένεια σύνολο $O(2^{O(k)} \log |V|)$ χρωματισμών, έτσι ώστε κάθε σύνολο $S \subseteq V$, $|S| = k$ να παίρνει *διαφορετικό* χρώμα. Η οικογένεια αυτή είναι υπολογίσιμη σε χρόνο $O(2^{O(k)} \cdot |V| \log |V|)$.

Οδηγεί και σε ντετερμινιστικούς και σε πιο γρήγορους αλγόριθμους. Προσοχή: το θεώρημα δίνει κάτι λιγότερο ισχυρό από αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση των αναγωγών, άρα χρειαζόμαστε επιπρόσθετη δουλειά.

Πολυπλοκότητα του κύκλου μήκους k

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου. ✓
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το k είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου. ✓
3. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το k είναι άρτιο τότε το πρόβλημα είναι ευκολότερο!

Ας δούμε συνοπτικά έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο για $k = 2$

1. Αρχικοποιούμε έναν πίνακα $T[i, j]$ στο $\emptyset$.

Ας δούμε συνοπτικά έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο για $k = 2$

1. Αρχικοποιούμε έναν πίνακα $T[i, j]$ στο $\emptyset$.
2. Για κάθε κορυφή $u \in V$, και για κάθε δύο γειτονές της s, t, κοιτάμε αν $T[s, t] \neq \emptyset$.
   - Αν ναι, τότε τα $u, s, t, T[s, t]$ σχηματίζουν κύκλο μήκους 4.

Ας δούμε συνοπτικά έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο για $k = 2$

1. Αρχικοποιούμε έναν πίνακα $T[i, j]$ στο $\emptyset$.
2. Για κάθε κορυφή $u \in V$, και για κάθε δύο γειτονές της s, t, κοιτάμε αν $T[s, t] \neq \emptyset$.
   - Αν ναι, τότε τα $u, s, t, T[s, t]$ σχηματίζουν κύκλο μήκους 4.
   - Αλλιώς, θέτουμε $T[s, t] = u$.
3. Αν υπάρχει κύκλος μήκους 4, θα τον βρούμε.

Ας δούμε συνοπτικά έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο για $k = 2$

1. Αρχικοποιούμε έναν πίνακα $T[i, j]$ στο $\emptyset$.
2. Για κάθε κορυφή $u \in V$, και για κάθε δύο γειτονές της s, t, κοιτάμε αν $T[s, t] \neq \emptyset$.
    - Αν ναι, τότε τα $u, s, t, T[s, t]$ σχηματίζουν κύκλο μήκους 4.
    - Αλλιώς, θέτουμε $T[s, t] = u$.
3. Αν υπάρχει κύκλος μήκους 4, θα τον βρούμε.
4. Χρόνος εκτέλεσης: Κάθε φορά που δε βρίσκουμε έναν κύκλο, αλλάζουμε μία εγγραφή του T σε μη κενή. Όμως, έχουμε το πολύ $O(n^2)$ εγγραφές.

Κύκλος ελάχιστου μήκους

Θεμελιώδες πρόβλημα: Να βρεθεί το μήκος του ελάχιστου κύκλου σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G.

Κύκλος ελάχιστου μήκους

Θεμελιώδες πρόβλημα: Να βρεθεί το μήκος του ελάχιστου κύκλου σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G.

Σίγουρα, δε μπορεί να λυθεί σε μικρότερο χρόνο για εντοπισμό τριγώνου.

Κύκλος ελάχιστου μήκους

Θεμελιώδες πρόβλημα: Να βρεθεί το μήκος του ελάχιστου κύκλου σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G.

Σίγουρα, δε μπορεί να λυθεί σε μικρότερο χρόνο για εντοπισμό τριγώνου. Αλλά είναι σε χρόνο $O(n^2 + T_{\text{triangle detection}}(2n))$ χρόνο (Itai, Rodeh'78).

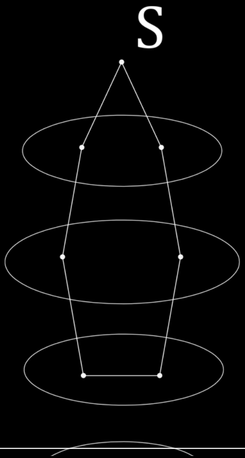
Κύκλος ελάχιστου μήκους

Θεμελιώδες πρόβλημα: Να βρεθεί το μήκος του ελάχιστου κύκλου σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G.

Σίγουρα, δε μπορεί να λυθεί σε μικρότερο χρόνο για εντοπισμό τριγώνου. Αλλά είναι σε χρόνο $O(n^2 + T_{\text{triangle detection}}(2n))$ χρόνο (Itai, Rodeh'78). Άρα είναι ισοδύναμο με τον εντοπισμό τριγώνου!

Ενδιάμεσο Θεώρημα. Δοθέντος $G = (V, E)$ και $s \in V$ το οποίο βρίσκεται σε κύκλο μήκους q, μπορούμε σε χρόνο $O(|V|)$ να βρούμε ένα κύκλο μήκους $\leq q + 1$. Αν ο q είναι άρτιος, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει έναν κύκλο

Ενδιάμεσο Θεώρημα. Δοθέντος $G = (V, E)$ και $s \in V$ το οποίο βρίσκεται σε κύκλο μήκους q, μπορούμε σε χρόνο $O(|V|)$ να βρούμε ένα κύκλο μήκους $\leq q + 1$. Αν ο q είναι άρτιος, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει έναν κύκλο



Έστω g το ελάχιστο μήκους κύκλου στο γράφημα.

Έστω g το ελάχιστο μήκους κύκλου στο γράφημα.

Βήμα 1. Τρέχουμε για όλα τα $s \in V$ τον προηγούμενο αλγόριθμο, και βρίσκουμε έναν κύκλο C μήκος $\leq g + 1$. Αν $|C|$ είναι περιττός, τότε $|C| = g$, και τελειώσαμε.

Έστω g το ελάχιστο μήκους κύκλου στο γράφημα.

Βήμα 1. Τρέχουμε για όλα τα $s \in V$ τον προηγούμενο αλγόριθμο, και βρίσκουμε έναν κύκλο C μήκος $\leq g + 1$. Αν $|C|$ είναι περιττός, τότε $|C| = g$, και τελειώσαμε.

Έστω $|C| = 2\ell$. Πρέπει να βρούμε αν $g = |C|$ ή $g = |C| - 1$.

Έστω g το ελάχιστο μήκους κύκλου στο γράφημα.

Βήμα 1. Τρέχουμε για όλα τα $s \in V$ τον προηγούμενο αλγόριθμο, και βρίσκουμε έναν κύκλο C μήκος $\leq g + 1$. Αν $|C|$ είναι περιττός, τότε $|C| = g$, και τελειώσαμε.

Έστω $|C| = 2\ell$. Πρέπει να βρούμε αν $g = |C|$ ή $g = |C| - 1$.

Παρατήρηση. Για κάθε $s \in V$, έχουν υπολογιστεί όλοι οι κόμβοι v σε απόσταση το πολύ $\ell - 1$ από τον s.

Δημιουργία του γράφου στον οποίο θα εντοπίσουμε τρίγωνο.

Δημιουργούμε έναν καινούριο γράφο G'.

1. Αρχικά, φτιάχνουμε ένα αντίγραφο του G.

Δημιουργία του γράφου στον οποίο θα εντοπίσουμε τρίγωνο.

Δημιουργούμε έναν καινούριο γράφο G'.

1. Αρχικά, φτιάχνουμε ένα αντίγραφο του G.
2. Φτιάχνουμε n κορυφές $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$, οι οποίες είναι αντίγραφα των κορυφών του G.

Δημιουργία του γράφου στον οποίο θα εντοπίσουμε τρίγωνο.

Δημιουργούμε έναν καινούριο γράφο G'.

1. Αρχικά, φτιάχνουμε ένα αντίγραφο του G.
2. Φτιάχνουμε n κορυφές $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$, οι οποίες είναι αντίγραφα των κορυφών του G.
3. Βάζουμε ακμή ανάμεσα σε v'_i και v_j αν η απόστασή τους στο G είναι $\ell - 1$.

Δημιουργία του γράφου στον οποίο θα εντοπίσουμε τρίγωνο.

Δημιουργούμε έναν καινούριο γράφο G'.

1. Αρχικά, φτιάχνουμε ένα αντίγραφο του G.
2. Φτιάχνουμε n κορυφές $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$, οι οποίες είναι αντίγραφα των κορυφών του G.
3. Βάζουμε ακμή ανάμεσα σε v'_i και v_j αν η απόστασή τους στο G είναι $\ell - 1$.

Κοιτάμε αν υπάρχει τρίγωνο στον G'.

Δύο ειδών τρίγωνα μπορούν να υπάρχουν στον G'.

- Το ένα είναι με κορυφές μόνο στο G. Τότε ξεκάθαρα $g = 3$.

Δύο ειδών τρίγωνα μπορούν να υπάρχουν στον G'.

- Το ένα είναι με κορυφές μόνο στο G. Τότε ξεκάθαρα $g = 3$.
- Το άλλο είναι με μία κορυφή v_i' και δύο κορυφές $v_j, v_k \in G$. Αυτό ισοδυναμεί με κύκλο στο G μήκους $(\ell - 1) + (\ell - 1) + 1 = 2\ell - 1 = |C| - 1$, άρα $g = |C| - 1$.

Δύο ειδών τρίγωνα μπορούν να υπάρχουν στον G'.

- Το ένα είναι με κορυφές μόνο στο G. Τότε ξεκάθαρα $g = 3$.
- Το άλλο είναι με μία κορυφή v_i' και δύο κορυφές $v_j, v_k \in G$. Αυτό ισοδυναμεί με κύκλο στο G μήκους $(\ell - 1) + (\ell - 1) + 1 = 2\ell - 1 = |C| - 1$, άρα $g = |C| - 1$.
- Αν υπάρχει κύκλος μήκους $|C| - 1$ στο G, τότε θα δημιουργηθεί τρίγωνο με κορυφές κάποια v_j, v_k, v_i' στο G.

Δύο ειδών τρίγωνα μπορούν να υπάρχουν στον G'.

- Το ένα είναι με κορυφές μόνο στο G. Τότε ξεκάθαρα $g = 3$.
- Το άλλο είναι με μία κορυφή v_i' και δύο κορυφές $v_j, v_k \in G$. Αυτό ισοδυναμεί με κύκλο στο G μήκους $(\ell - 1) + (\ell - 1) + 1 = 2\ell - 1 = |C| - 1$, άρα $g = |C| - 1$.
- Αν υπάρχει κύκλος μήκους $|C| - 1$ στο G, τότε θα δημιουργηθεί τρίγωνο με κορυφές κάποια v_j, v_k, v_i' στο G. Έστω v_j, v_k δύο διαδοχικές κορυφές του G.

Πολυπλοκότητα του κύκλου μήκους *k*

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.

Πολυπλοκότητα του κύκλου μήκους *k*

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το *k* είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.

Πολυπλοκότητα του κύκλου μήκους k

1. Σε κατευθυνόμενους γράφους, το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
2. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το k είναι περιττό το πρόβλημα είναι τόσο δύσκολο όσο ο εντοπισμός τριγώνου.
3. Σε μη κατευθυνόμενους γράφους, όταν το k είναι άρτιο τότε το πρόβλημα είναι ευκολότερο!

Ευχαριστούμε!