Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Λεπτομερής Πολυπλοκότητα 2020-21

(ΣΗΜΜΥ, ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Βασίλης Νάκος – Άρης Παγουρτζής

2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1. Σε αυτή την άσκηση θα ανάγουμε το πρόβλημα της $(\min, +)$ συνέλιξης στο 3SUM. Υπενθυμίζουμε ότι

- Στη πρόβλημα της $(\min, +)$ συνέλιξης δίνονται δύο πίνακες[1] A, B μήκους n και ζητείται να υπολογιστεί ο μήκους $2n$ πίνακας $A \star B$ ο οποίος ικανοποιεί $(A \star B)[k] := \min_{i+j=k} \{A[i] + B[j]\}$.

- Στο πρόβλημα απόφασης του 3SUM δίνονται τρία σύνολα θετικών ακεραίων X, Y, Z πληθικότητας n και ζητείται να απαντηθεί αν υπάρχει $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ ώστε $x + y = z$.

Αυστηρά υποτετραγωνικός αλγόριθμος σε αυτή τη σειρά ασκήσεων σημαίνει αλγόριθμος χρόνου $n^{2-\epsilon} \cdot \mathrm{poly}(\log W), \epsilon > 0$, όπου W ο μέγιστος αριθμός που εμφανίζεται στην είσοδο.

(α) Να δειχθεί ότι αν έχουμε έναν αυστηρά υποτετραγωνικό αλγόριθμο για το 3SUM, τότε μπορούμε σε αυστηρά υποτετραγωνικό χρόνο να βρούμε και μία τριάδα $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ ώστε $x + y = z$, αν αυτή υπάρχει.

(β) Να δειχθεί ότι αν έχουμε έναν αυστηρά υποτετραγωνικό αλγόριθμο για το 3SUM, τότε μπορούμε σε αυστηρά υποτετραγωνικό χρόνο να βρούμε και όλα τα $z \in Z$ για το οποίο υπάρχουν $x \in X, y \in Y$ ώστε $x + y = z$.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε την στρατηγική αναγωγής ενός προβλήματος με μεγάλο μέγεθος εξόδου σε ένα πρόβλημα με μικρό μέγεθος εξόδου.

(γ) Έστω το εξής ενδιάμεσο πρόβλημα $(\min, +)$ συνέλιξης. Δίνονται πίνακες $A, B \in [W]^n, C \in [W]^{2n-1}$ με την εγγύηση ότι $(A \star B)[k] \geq C[k]$, και θέλουμε να βρούμε εκείνα τα k για τα οποία $(A \star B)[k] = C[k]$. Δείξτε ότι αν μπορούμε να λύσουμε το 3SUM σε αυστηρά υποτετραγωνικό χρόνο, τότε μπορούμε να λύσουμε και το εν λόγω ενδιάμεσο πρόβλημα σε αυστηρά υποτετραγωνικό χρόνο.

(δ) Να δείξετε ότι αν υπάρχει αυστηρά υποτετραγωνικος αλγόριθμος για το 3SUM, τότε υπάρχει και αυστηρά υποτετραγωνικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της $(\min, +)$ συνέλιξης.

Υπόδειξη: Ορίστε για $0 \leq \ell \leq \log W$ τους πίνακες A_ℓ, B_ℓ ώστε $A_\ell[i] := \lfloor A[i]/2^\ell \rfloor, B[j] := \lfloor B[j]/2^\ell \rfloor$, και υπολογίστε τις συνελίξεις $A_\ell \star B_\ell$ κατά φθίνον ℓ.

Άσκηση 2.

Υπενθυμίζουμε το πρόβλημα υπολογισμού απόστασης Hamming σε κυλιόμενο παράθυρο. Δίνονται δύο συμβολοσειρές $T \in \Sigma^n, P \in \Sigma^m$, όπου Σ αλφάβητο και $m \leq n$, και ζητείται να βρεθεί για κάθε $0 \leq o \leq n - m$ η ποσότητα

$$|\{0 \leq j \leq m-1 : P[j] \neq T[o+j]\}|.$$

Κοινώς, ζητείται να βρεθεί η απόσταση Hamming μεταξύ του P και κάθε υπό-συμβολοσειράς του T μήκους m. Να δείξετε ότι αν αυτό το πρόβλημα λύνεται σε χρόνο $\mathrm{SlidingTime}(n, m)$, τότε το πρόβλημα πολλαπλασιασμού πινάκων Boole με διάσταση N λύνεται σε χρόνο $\mathrm{SlidingTime}(O(N^2), O(N^2))$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αλφάβητο μεγέθους $\Omega(N)$. Υποθέτοντας ότι θέλετε να πολλαπλασιάσετε δύο πίνακες A, B, ίσως σας βοηθήσει να κωδικοποιήσετε το στοιχείο $A[i][j]$ με 'j' αν $A[i][j] = 1$, και με '@' αν $A[i][j] = 0$. Σκεφτείτε πως να κωδικοποιήσετε τον B.

[1] Σε αυτή τη σειρά ασκήσεων, η αρίθμηση των δεικτών ξεκινάει από το 0.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις ...., σε ηλεκτρονική μορφή. Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση `finegrained@corelab.ntua.gr`.