✻

λ-λογισμός ως γλώσσα προγραμματισμού

π.χ. $\bar{n} = \lambda f \lambda x.\, f^n(x)$ $\qquad f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(fx)\cdots)}_{n-\text{φορές}}$

$\bar{0} = \lambda f \lambda x.\, x$

$\bar{1} = \lambda f \lambda x.\, fx$

$\bar{2} = \lambda f \lambda x.\, f(fx)$

⋮

Αν $F : \omega^n \to \omega$, $\underset{\sim}{F} \in \Lambda$ και $\underset{\sim}{F}\, \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n = \overline{F(a_1 \cdots a_n)}$

Επόμενος: $S(n) = n+1$

$u \qquad \lambda f \lambda x.\, f^n(x)$

$\downarrow$

$ufx \quad (= f^n(x))$

$\downarrow$

$fufx \quad (= f^{n+1}(x))$

$\downarrow$

$\underset{\sim}{S} = \lambda u \lambda f \lambda x.\, f(ufx)$

Επόμενο 1

$u \qquad \lambda f \lambda x.\, f^n(x)$

$\downarrow$

$uf \quad (= \lambda x\, f^n(x))$

$\downarrow$

$uf(fx) \quad (= f^n(fx) = f^{n+1}(x))$

$\downarrow$

$\lambda u.\, \lambda f \lambda x.\, uf(fx) = \underset{\sim}{S}^1$

$\underset{\sim}{S} \neq_\beta \underset{\sim}{S}^1$

Πρόσθεση $\quad +(m,n) = m+n$

$u \qquad \lambda f \lambda x.\, f^m(x)$

$\downarrow$

$uf = (\lambda x.\, f^m(x))$

$uf\,vfx \qquad \lambda f x.\, f^n(x)$

$(\lambda x.\, f^m(x))\, f^n(x) = (f^m(f^n(x))) = f^{m+n}(x)$

$\downarrow$

$\lambda u \lambda v \lambda f \lambda x.\, uf(vfx) = \underset{\sim}{+}$

Booleans

$$\underline{true} \equiv \lambda x \lambda y . x$$

$$\underline{false} \equiv \lambda x \lambda y . y$$

$\text{if}\underset{B}{\_}\text{then}\underset{P}{\_}\text{else}\underset{Q}{\_} \equiv BPQ$

| $B = \underline{true}$ | $BPQ =_{\beta} P$ |
| $B = \underline{false}$ | $BPQ =_{\beta} Q$ |

Ζεύγη:

$$[P,Q] \equiv \lambda x . x P Q$$

$$\pi_1 \equiv \underline{true}$$

$$\pi_2 \equiv \underline{false}$$

$$[P,Q]\pi_1 =_{\beta} (\lambda x . x P Q)\, \underline{true} =_{\beta} \underline{true}\, PQ =_{\beta} P$$

$$[P,Q]\pi_2 =_{\beta} Q.$$

Αναδρομή

$\forall F \in V,\ \exists X :\ FX =_{\beta} X$ και επιπλέον $\exists Y$ ώστε

$$F(YF) =_{\beta} YF$$

$$Y \equiv \lambda f . [(\lambda x . f(xx))\, \lambda x . f(xx)]$$

(Curry)

Οπότε
$$\begin{aligned} YF &=_{\beta} (\lambda x . F(xx))\, \lambda x . F(xx) \\ &=_{\beta} F\big((\lambda x . F(xx))\, \lambda x . F(xx)\big) \\ &=_{\beta} F(YF) \end{aligned}$$

Turing: $A \equiv \lambda x \lambda f . f(xxf)$ και $\Theta = AA$

Έχει την ιδιότητα $\Theta F \twoheadrightarrow F(\Theta F)$

Επίλυση εξισώσεων

έστω η εξίσωση $x =_\beta M$ | M μπορεί να περιέχει το x.

τότε $\exists F \in \Lambda$: $F =_\beta M[x:=F]$

Αρκεί να πάρουμε

$x =_\beta M =_\beta (\lambda x.M)x$ (αρκεί να πάρουμε το σταθερό σημείο του $\lambda x.M$. $\xi = Y(\lambda x.M)$.

Επέκταση:

Η εξίσωση $x y_1 \cdots y_n =_\beta M \Rightarrow x =_\beta \lambda y_1 \cdots \lambda y_n . M$ μπορεί να λυθεί ως προς x.

δηλ. $\exists F$ ώστε $\forall Y_1 \cdots Y_n$ έχουμε $F Y_1 \cdots Y_n =_\beta M[x:=F][y_1:=Y_1] \cdots [y_n:=Y_n]$

Αρκεί $F \equiv Y(\lambda x \lambda y_1 \cdots \lambda y_n . M)$

διότι από $x y_1 \cdots y_n =_\beta M$ έχουμε

$x =_\beta \lambda y_1 \cdots \lambda y_n . M$

άρα $x = Y(\lambda x. \lambda y_1 \cdots \lambda y_n . M)$

© Έστω ότι έχουμε

την συνάρτηση pred: $\text{pred}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$

pred? Έστω ότι την έχουμε και θέλουμε την $f(n)=n!$

$f(0)=1$

$f(n)=n \times (n-1)!$

έστω ότι έχουμε το $\underline{x}$. πολ/σμα

$$f\,\underline{n} =_\beta \text{if } \underline{\text{zero}}\ \underline{n} \text{ then } 1 \text{ else } \underline{n} * (\underline{\text{pred}}\ \underline{n})!$$

όπου $\underline{\text{Zero}} \equiv \lambda n.\, n\,(\underline{\text{true}}\ \underline{\text{false}})\ \underline{\text{true}}$ | $\underline{\text{Zero}}\ \bar{0} =_\beta \text{true}$

$\underline{\text{Zero}}\ \overline{n+1} =_\beta \text{false}$

Άρα $$\boxed{\underset{\sim}{\underline{f}} \equiv Y\left(\lambda f \lambda x.\ (\underline{\text{zero}}\ x)\,(\underline{I})\,\left(\underline{*}\ \overset{x}{\underline{n}}\ (\text{pred}\ f\,(\underline{\text{pred}}\ x)\right)\right)}$$