Αναπαράσταση αναδρομικών συναρτήσεων (R) | $x \in \omega = \{0, 1, \dots\}$

R1: • Προβολές $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, για κάθε i $1 \leq i \leq n$.

• Επόμενος: $\tilde{S}(x) = x + 1$

• Μηδενική: $Z(x) = 0$

R2 Σύνθεση: Αν $g: \omega^k \to \omega$, $h_1, \dots, h_k : \omega^m \to \omega$ αναδρομικές τότε

$f: \omega^m \to \omega$ ~~με~~ αναδρομική με

$$f(x_1, \dots, x_m) = g(h_1(x_1 \dots x_m), \dots, h_k(x_1 \dots x_m))$$

R3 Ελαχιστοποίηση: Αν $g: \omega^{m+1} \to \omega$ αναδρομική και

$\forall x_1 \dots x_m \exists y : g(y, x_1, \dots x_m) = 0$ τότε $f: \omega^m \to \omega$ αναδρομική

όπου $f(x_1 \dots x_m) = \underbrace{\mu y . g(y, x_1, \dots x_m) = 0}_{\text{Το μικρότερο } y.}$

R (πρωτογενής):
$$\begin{cases} f(0, x_1 \dots x_m) = g(x_1 \dots x_m) \\ f(y+1, x_1 \dots x_m) = h(f(y, x_1 \dots x_m), y, x_1 \dots x_m) \end{cases}$$

Αναπαράσταση

R1

• $\widetilde{I_i^n} \equiv \lambda x_1 \dots \lambda x_m . x_i$

• $\tilde{S} \equiv \lambda x \lambda y \lambda z . y(xyz)$

• $\tilde{Z} \equiv \lambda x . \bar{0}$

R2

$$\boxed{\tilde f \equiv \lambda x_1 \dots \lambda x_m . \tilde g (\tilde h_1 x_1 \dots x_m) \dots (\tilde h_k x_1 \dots x_m)}$$

$$\cancel{\tilde f \bar n_1 \dots \bar n_m =_\beta \tilde g (\tilde h_1 \bar n_1 \dots \bar n_m) \dots}$$

$$=_\beta \cancel{\tilde g (\tilde h_1 \bar n_1 \dots \bar n_m), \dots) =_\beta g(}$$

Διότι:

$$\tilde f \bar n_1 \dots \bar n_m =_\beta \tilde g (\tilde h_1 \bar n_1 \dots \bar n) \dots =_\beta \tilde g\, \overline{h_1 (n_1 \dots n_m)} \dots\dots$$

$$=_\beta \overline{g(h_1(n_1 \dots n_m) \dots)} =_\beta \overline{f(n_1 \dots n_m)}$$

Ιδέα: Ξεκινάμε από το $g(0, n_1, \dots, n_m)$ και ελέγχουμε το κάθε $g(n, n_1 \dots n_m)$

Αν αυτό είναι 0 επιστρέφουμε το n

Αν αυτό είναι $\neq 0$ ελέγχουμε το $g(n+1, n_1 \dots n_m)$.

Τον έλεγχο τον επιτυγχάνουμε μέσω H από το σχήμα:

$$\boxed{H y x_1 \dots x_m =_\beta \underline{if}\ (\underline{zero}\ (\tilde g y x_1 \dots x_m)\ \underline{then}\ y\ \underline{else}\ H(\bar S y) x_1 \dots x_m .}$$

ορίζουμε $\tilde f \equiv \lambda x_1 \dots \lambda x_n . H \bar 0 x_1 \dots x_n$

<u>οπότε</u>

$$\tilde f \bar n_1 \dots \bar n_m =_\beta H \bar 0 \bar n_1 \dots \bar n_m$$

$$=_\beta \begin{cases} \bar 0 & \text{αν } \tilde g \bar 0 \bar n_1 \dots \bar n_m =_\beta \bar 0 \\ H \bar 1 \bar n_1 \dots \bar n_m & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$=_\beta \begin{cases} \bar 1 & \text{αν } \tilde g \bar 1 \bar n_1 \dots \bar n_m =_\beta \bar 0 \\ H \bar 2 \bar n_1 \dots \bar n_m & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\vdots$

κ.ο.κ. (Θα σταματήσει αν υπάρχει)