λ-λογισμός

Όροι: $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\quad x, y, z$ μεταβλητές

1. $x \in V \Rightarrow x$ είναι λ-όρος
2. M, N λ-όροι $\Rightarrow (MN)$ λ-όρος
3. M λ-όροι, $x \in V \Rightarrow (\lambda x.M)$ λ-όροι

Λ = το σύνολο των λ-όρων

$$\Lambda ::= V \mid (\Lambda\Lambda) \mid (\lambda V.\Lambda)$$

ή

$$M ::= x \mid (MM) \mid (\lambda x.M)$$

BNF (Backus Normal Form).

μεταβλητή, εφαρμογή, αφαίρεση

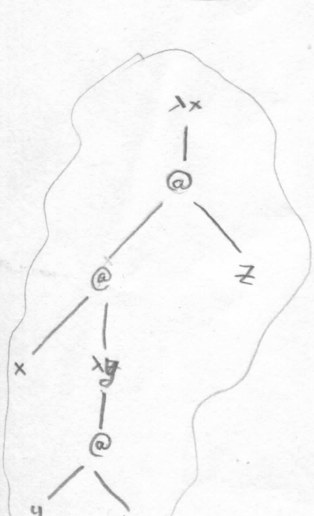
Γραφή:

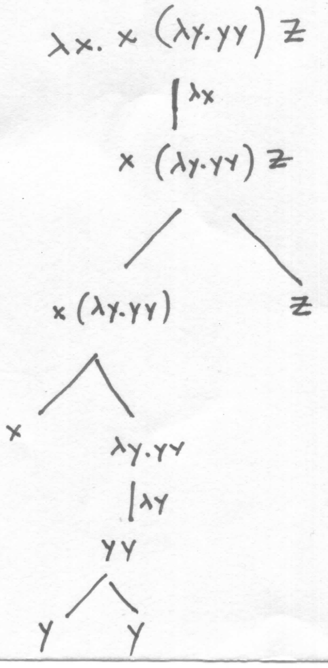
- Παραλείπουμε εξωτερικές παρενθέσεις
- $MNP\dots$ σημαίνει $((MN)P)\dots$
- $\lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n . M$ ή $\lambda x_1 \dots x_n . M$ αντί για $\lambda x_1(\dots(\lambda x_n M)\dots))$

Π.χ. $(\lambda x.((x(\lambda y.(yy)))z))$ γράφεις $\lambda x.\ x(\lambda y.yy)z$

Δομή των όρων

Υπόοροι:





Ό,τι υπάρχει στο δέντρο είναι υπόοροι (και βέβαια όροι)

Υπ = Υπόοροι (σύνολο υπόορων)

$$Y\pi(x) = \{x\}$$
$$Y\pi(MN) = Y\pi(M) \cup Y\pi(N) \cup \{MN\}$$
$$Y\pi(\lambda x.M) = Y\pi(M) \cup \{\lambda x.M\}$$

Ακριβέστερα πρέπει να δημιουργήσουμε τον (υπο)όρο στη συγκεκριμένη θέση δηλ. την <u>εμφάνιση</u> του όρου στον όρο. Θα το δημιουργήσουμε διαισθητικά κάπως σα δεδομένο.

Μεταβλητές του όρου λέγονται οι υπόοροι x που εμφανίζονται στον όρο.
Άρα έχουμε και εμφανίσεις των μεταβλητών στους όρους.
~~...~~ στο λx το x δεν νοείται ως μεταβλητή του όρου, αλλά ως μεταβλητή δέσμευσης. Το λx ως τελεστής δέσμευσης.
Όταν εμφανίζεται ένα λx στον όρο M τότε υπάρχει μοναδικό N ώστε το λxN είναι υπόορος του M. Το N είναι η εμβέλεια (βεληνεκές) του λx. Κάθε x που "βρίσκεται" στο N δεσμεύεται από τον τελεστή λx.
Ελεύθερη εμφάνιση του x είναι αυτή που δεν δεσμεύεται από κανένα λx.

FV(M) = το σύνολο των ελευθ. μεταβλ. που έχουν ελεύθερη εμφάνιση στο M.

$$
\begin{cases}
FV(x) = \{x\} \\
FV(MN) = FV(M) \cup FV(N) \\
FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}.
\end{cases}
$$

Άρα έχουμε ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών

Μπορούμε $\lambda y.x$

$$(\lambda y.\underset{\text{δεσμ.}}{y}x)\,\underset{\text{ελευθ.}}{y}$$

καινούργια ή φρέσκια μεταβλητή.

Στην πραγματικότητα αυτό που φτιάχνεις είναι <u>πρό-όροι</u>.

<u>Αντικατάσταση</u> Αντικαθιστούμε μόνον οι ελεύθερες εμφανίσεις.

$$(\lambda y.\, yx)\,(\lambda x.\, yx)\,[x := P]$$

μόνον.

<u>ΑΛΛΑ</u>: όχι $(\lambda y.\, yx)[x:=y] \not\equiv \lambda y.\, yy$

Δεν πρέπει καμμία μεταβλητή του P να δεσμεύεται κατά τη διαδικασία της αντικατάστασης.

$M[x:=N]$ ορίζεται επαγωγικά υπό τις προϋποθέσεις.

$x\,[x:=N] = N$

$y\,[x:=N] = y, \quad y \neq x$

$(PQ)[x:=N] = P[x:=N]\; Q[x:=N]$

$(\lambda x P)\,[x:=N] = \lambda x P$

$(\lambda y P)\,[x:=N] = \lambda y.\, P[x:=N]$, μόνον αν $x \neq y$

$y \notin FV(N)$ ή $x \notin FV(P)$

<u>Λήμμα</u>: $M[x:=N][y:=L] = M[y:=L]\,[x:=N[y:=L]]$ με την προϋπόθεση ότι
- $M[x:=N]$ ορίζεται
- $N[y:=L]$, $M[x:=N][y:=L]$ ορίζουν και $x \neq y$

Για την ισότητα του λήμματος πρέπει $x \notin FV(L)$ ή $y \notin FV(M)$.

α-ισοδυναμία

Δύο όροι M, N είναι α-ισοδύναμοι $M \equiv_\alpha N$ αν ο ένας μπορεί να μετασχηματιστεί στον άλλο με αλλαγή ονομασίας των δεσμευμένων μεταβλητών και των μεταβλητών δέσμευσης.

$\equiv_\alpha$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Δεν ξεχωρίζουμε δύο α-ισοδύναμους όρους

Μπορούμε να σχηματίσουμε τον α-ισοδύναμο όρο αντικαθιστώντας το $\lambda x.M$ με το $\lambda y.M[x:=y]$ όπου y είναι φρέσκια μεταβλητή

Το $M[x:=N]$ το συμβολίζουμε και με $M[N/x]$.

Σύμβαση μεταβλητών. Καμμία ελεύθερη μεταβλητή (σε ένα πλαίσιο) δεν είναι ίδια με τις δεσμευμένες μεταβλητές ή μεταβλητές δέσμευσης. Οπότε η αντικατάσταση ορίζεται πάντα

Γράφουμε $M\left[N_1/x_1, \ldots, N_k/x_k\right]$ για την ταυτόχρονη αντικατάσταση (παράλληλη) των $x_1 \ldots x_k$ αντίστοιχα με τα $N_1 - N_k$

Ισχύουν

Λήμμα 1. Μόνο οι ελεύθερες μεταβλητές αντικαθίστανται

Αν $y_1, \dots, y_l \notin FV(M)$ τότε

$$M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \dots, {}^{N_k}/_{x_k}, {}^{P_1}/_{y_1}, \dots, {}^{P_l}/_{y_l}\right] = M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \dots, {}^{N_k}/_{x_k}\right]$$

, $x_1 \dots x_k, y_1, \dots y_l$ ξεχωριστές

Λήμμα 2

$$M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \dots, {}^{N_k}/_{x_k}\right]\left[{}^{P_1}/_{y_1}, \dots, {}^{P_l}/_{y_l}\right] = M\left[{}^{M_1}/_{x_1}, \dots, {}^{M_k}/_{x_k}, {}^{P_1}/_{y_1}, \dots, {}^{P_l}/_{y_l}\right]$$

όπου $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ ξεχωριστές και $y_1, \dots, y_l \notin FV(N_1, \dots, N_k)$

Λήμμα 3

$$M\left[{}^{y_1}/_{x_1}, \dots, {}^{y_k}/_{x_k}\right]\left[{}^{N_1}/_{y_1}, \dots, {}^{N_k}/_{y_k}\right] = M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \dots, {}^{N_k}/_{x_k}\right]$$

όπου $y_i \notin FV(M)$

Λήμμα 4.

$$M\left[{}^{N_1}/_{y_1}, \dots, {}^{N_l}/_{y_l}\right]\left[{}^{P_1}/_{x_1}, \dots, {}^{P_k}/_{x_k}\right] = M\left[{}^{P_1}/_{x_1}, \dots, {}^{P_k}/_{x_1}, {}^{N_1'}/_{y_1}, \dots, {}^{N_k'}/_{y_k}\right]$$

με $N_i' = N_i\left[{}^{P_1}/_{x_1}, \dots, {}^{P_k}/_{x_k}\right]$

και $x_1 \dots x_k\, y_1 \dots y_l$ ξεχωριστές.

$$\dots [\,/y_1 \dots /y_\ell\,][\,/x_1 \dots /x_k\,] \equiv_\alpha M[\,/a_1 \dots /x_k\,][\,/y_1 \dots /y_\ell\,]$$

β – αναγωγή

<u>Πρόταση 5</u> Εάν $(\lambda x.M)N \equiv_\alpha (\lambda x'.M')N'$ τότε $M[N/x] \equiv_\alpha M'[N'/x']$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε καλώς την διμελή σχέση β στο $\Lambda\ (=\Lambda/\equiv_\alpha)$.

$$\underset{\text{redex}}{(\lambda x.M)N} \;\beta\; \underset{\text{contractum}}{M[N/x]}.$$

Ορισμός: Πότε μια διμελή σχέση $R \subseteq \Lambda^2$ είναι λ-συμβατή σε μια θέση

<u>Ορισμός</u> $\to_\beta$ είναι η μικρότερη διμελής σχέση που περιλαμβάνει την β και είναι λ-συμβατή σε μία θέση.

Σύμφωνα με την πρόταση 2 έχουμε ότι $M \to_\beta N$ αν ένας υπόορος του M που είναι redex έχει αντικατασταθεί με το contractum (οπότε προέκυψε ο N)

<u>Ορισμός</u> $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα (ή κλείσιμο) της $\to_\beta$.

Οπότε $M \twoheadrightarrow_\beta N \iff M \equiv M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_n \equiv N$, $n \geq 0$ (για $n=0$, $M \equiv N$)

- Η $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η μικρότερη σχέση που περιέχει την $\to_\beta$ και είναι ανακλαστική και μεταβατική. Ονομάζεται β-αναγωγή.