

λογισμ

- ① • Η αλγεβρα Lindenbaum επί αλγεβρ. Heyting.
- ② • Κάθε αλγεβρ. Boole επί αλγεβρ. Lindenbaum το $a \Rightarrow b = \neg a \vee b$.
- ③ • Κάθε πεπερασμένη distributive lattice επί αλγεβρ. Heyting.

Απόδειξη: Γλ. 39 - Σουρρεν | Δεφ 20.1 (επίσης εκδόξ)

Λήμμα: Σε αλγεβρ. Heyting τα ακόλουθα ισχύουν:

$$① \quad a \leq b \Rightarrow c \Leftrightarrow a \wedge b \leq c$$

$$② \quad a \leq b \Leftrightarrow a \Rightarrow b = 1$$

Πρώτη! ① \Rightarrow : Έστω c $b \wedge (b \Rightarrow c) \leq c$, εφόσον
 έστω τώρα $a \leq (b \Rightarrow c) \Rightarrow$ τότε $b \wedge a \leq b \wedge (b \Rightarrow c) \leq c \rightarrow a \leq b \Rightarrow c$

$$① \Leftarrow: \text{αρκεί } b \wedge a \leq c \stackrel{\text{αρκεί}}{\Rightarrow} a \leq b \Rightarrow c$$

② \Rightarrow : $a \leq b$, τότε $a \wedge 1 \leq b$ και άρα αφού $1 \leq a \Rightarrow b$, τότε $a \Rightarrow b = 1$

$$\Leftarrow: \text{εάν } a \Rightarrow b = 1, \text{ τότε } a \leq a \Rightarrow b = 1$$

$$\text{οπότε από ① } a \wedge a \leq b, \text{ τότε } a \leq b.$$

① Ένα id. αντιστοιχεί.

② αν $a \leq b$ τότε $a \cap c \leq b$. δεδοτ^ο $c \leq -a \cup b$

$$\text{Είνα } c = c \cap 1 = c \cap (-a \cup a) = (c \cap -a) \cup (c \cap a)$$

$$\leq (c \cap -a) \cup b$$

$$\leq (c \cup b) \cap (-a \cup b) \leq -a \cup b$$

③ Ω, παρατηρούμε δε ότι max. (1) και min (0).

Αρα η ιδιότητα σε σχέση με $a \Rightarrow b$.

Δεδοτ^ο b ορίζουμε $A = \{c \mid c \cap a \leq b\}$. Το $a \cap 1$ ανήκει στην A αφού $a \cap 1 = a \leq b$.
 Αφού $a \in A$ έχουμε $a \leq \sup A$.
 Αφού $a \in A$ έχουμε $a \leq \sup A$.

Το d είναι $\sup A$. Για να υπάρχει $c \in A$ ώστε $c \leq d$ ή $c \cap a \leq d$ ή $(c \cap a) \cup d = d$
 $(c \cup d) \cap (a \cup d) = d$

Το d είναι $d = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n$ με $A = \{c_1, \dots, c_n\}$

$$\text{Αν } a \cap d = a \cap (c_1 \cup \dots \cup c_n) = (a \cap c_1) \cup \dots \cup (a \cap c_n) \leq b \cup \dots \cup b = b$$

Δοκ $a \cap d \leq b$ οπότε $d \in A$ και $d \leq \sup A$ και $a \cap d \leq b$

και αν $b \leq a$ τότε $a \in A$ και $a \leq \sup A$ και $a \cap a = a \leq b$

$$\text{από } d = a \Rightarrow b.$$

Παρατήρηση
 Η ιδιότητα $a \leq b$ ισοδυναμεί με $a \cap b = a$

$$(1) A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$$

$$(2) A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{A} \cup B = X$$

Λημμα

$$(1) \Rightarrow: \text{Εφ' αριστερά } b \cap (b \Rightarrow c) \leq c$$

$$\text{Επει } a \leq b \Rightarrow c \Rightarrow b \cap a \leq b \cap (b \Rightarrow c) \leq c$$

$$\Leftarrow: \text{επειδή } b \cap a \leq c \Rightarrow a \leq b \Rightarrow c \text{ (από αριστερά)}.$$

$$(2) \Rightarrow: a \leq b \text{ τότε } a \cap 1 \leq b \text{ και από (1) } 1 \leq a \Rightarrow b \text{ άρα } a \Rightarrow b = 1$$

$$\Leftarrow: \text{έστω } a \Rightarrow b = 1 \text{ τότε } a \leq (a \Rightarrow b) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a \cap a \leq b \Rightarrow a \leq b.$$

Σημειώσεις. Έστω $\mathcal{H} = \langle \mathcal{H}, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ αλγεβρά Heyting.

$\pi M = \pi_0$ είναι μια προκαταμετρήσιμη

Αντιμετάθετη, $V: \pi M \rightarrow \mathcal{H}$

Ορίζεται ~~$V(\varphi) = \llbracket \varphi \rrbracket_V$~~ με συνέπεια σε φ .

$$\llbracket p \rrbracket_V = V(p) \quad : p \in \pi M.$$

$$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_V = \llbracket \varphi \rrbracket_V \sqcap \llbracket \psi \rrbracket_V$$

$$\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_V = \llbracket \varphi \rrbracket_V \sqcup \llbracket \psi \rrbracket_V$$

$$\llbracket 1 \rrbracket_V = 0$$

$$\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_V = \llbracket \varphi \rrbracket_V \Rightarrow \llbracket \psi \rrbracket_V$$

Ορίζεται \models ως εξής: $\mathcal{H}, V \models \varphi$ αν $\llbracket \varphi \rrbracket_V = 1$

$$\mathcal{H} \models \varphi \quad \text{αν} \quad \llbracket \varphi \rrbracket_V = 1, \text{ για όλα τα } V$$

$$\mathcal{H}, V \models \Gamma \quad \text{αν} \quad \mathcal{H}, V \models \varphi, \text{ για όλα τα } \varphi \in \Gamma$$

$$\mathcal{H} \models \Gamma \quad \text{αν} \quad \mathcal{H}, V \models \Gamma, \text{ για όλα τα } V$$

$$\models \varphi \quad \text{αν} \quad \mathcal{H}, V \models \varphi \text{ για όλα τα } \mathcal{H}, V$$

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{αν} \quad \mathcal{H}, V \models \Gamma \text{ συνεπώς και } \mathcal{H}, V \models \varphi \text{ για όλα τα } \mathcal{H}, V.$$

• Αν $\models \varphi$: το φ είναι ιντουϊστικονιστική πρόταση

Θέωρημα π)ρώτου. Τα αλκωλ εν 160διν4

1. $\Gamma \vdash \varphi$

2. $\Gamma \vdash \varphi$

Απόδειξη.

1 \Rightarrow 2. (Ορδωμκ).

Έστω $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ και έστω V άποσφι σε άλγρεκ Heyting π.

ώκ $\llbracket \Gamma \rrbracket_V = \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \wedge \dots \wedge \llbracket \varphi_n \rrbracket_V$ (ω $\Gamma = \emptyset$ η τιμή του $\llbracket \Gamma \rrbracket_V$ είναι 1).

Αποδεικνύεται π-ε έκτασφι ελο $\Gamma \vdash \varphi$ ου αν $\Gamma \vdash \varphi$ ώκ ~~$\llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi \rrbracket_V$~~
 $\llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi \rrbracket_V$

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi \rrbracket_V.$

• Αξίωμα $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. πρσ άνέι.

$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \quad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2}$	$\left \begin{array}{l} \text{Ε.ν. } \llbracket \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rrbracket_V \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V \quad \& \quad \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V \\ \downarrow \\ \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \Rightarrow \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V, \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V \end{array} \right.$
---	---

Τότε ~~$\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V$~~ $\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \wedge (\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \Rightarrow \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V) \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V$

Αλλ: $\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \wedge (\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \Rightarrow \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V) \leq \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V$ σποπ $\llbracket \varphi_2 \rrbracket_V \geq \llbracket \Gamma \rrbracket_V.$

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2}$$

Ε.ν. $\llbracket \Gamma \rrbracket_V \wedge \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V$

ώκ: έστω ώκ $\llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \wedge \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V = \llbracket \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rrbracket_V$

άρα έστω 0.κ ~~$\llbracket \Gamma \rrbracket_V$~~

Θέλουε $\llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \Rightarrow \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V$. Αραί (άπο έστω)

$\llbracket \varphi_1 \rrbracket_V \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket_V \leq \llbracket \varphi_2 \rrbracket_V$ (ωκίε άπο Ε.ν.)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \theta \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}$$

ε.γ. $\llbracket \Gamma \rrbracket_v \leq \llbracket \varphi_1 \rrbracket_v \sqcup \llbracket \varphi_2 \rrbracket_v$, $\underbrace{\llbracket \Gamma \rrbracket \cap \llbracket \varphi_1 \rrbracket \leq \llbracket \theta \rrbracket, \llbracket \Gamma \rrbracket \cap \llbracket \varphi_2 \rrbracket \leq \llbracket \theta \rrbracket}_{*}$

\Downarrow

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_v = \llbracket \Gamma \rrbracket_v \cap (\llbracket \varphi_1 \rrbracket_v \sqcup \llbracket \varphi_2 \rrbracket_v) = (\llbracket \Gamma \rrbracket_v \cap \llbracket \varphi_1 \rrbracket_v) \sqcup (\llbracket \Gamma \rrbracket_v \cap \llbracket \varphi_2 \rrbracket_v)$$

από * $\llbracket \Gamma \rrbracket_v \leq \llbracket \theta \rrbracket_v$

κ.β.π.

2 \Rightarrow 1. [αληθείτητα].

Χρησιμοποιούμε ως εργαλείο Lindenbaum,

έστω $\Gamma \not\vdash \varphi$ και $\Gamma \vdash \varphi$. Τότε $\varphi \in T$

δι. $\| \varphi \|_\sim \neq 1$ στη \mathcal{A}_Γ . (ή \mathcal{L}_Γ).

Ορίστε αλγεβρά V στη \mathcal{L}_Γ με

$$V(p) = \| p \|_\sim.$$

Τότε ισχύει: $\llbracket \psi \rrbracket_v = \| \psi \|_\sim$, γι $\Delta < \eta < \psi$. (απόδειξη με επαγωγή).

• $\psi \equiv p$ ατομικό

$$\psi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \llbracket \psi \rrbracket_v = \llbracket \varphi_1 \rrbracket_v \sqcup \llbracket \varphi_2 \rrbracket_v \stackrel{\text{ε.γ.}}{=} \| \varphi_1 \|_\sim \sqcup \| \varphi_2 \|_\sim$$

Τις \rightarrow , παραμένει στην Lindenbaum algebra \mathcal{L}_Γ

το pseudo-αριθμητικό υπάρχει και είναι $\| \varphi \|_\sim \Rightarrow \| \psi \|_\sim = \| \varphi \rightarrow \psi \|_\sim$.

$$\stackrel{\text{α.β.π.}}{=} \| \varphi \rightarrow \psi \|_\sim$$

κ.α.κ.

Έπεται ότι $\llbracket \varphi \rrbracket_v \neq 1$. ~~XX~~ (από διάν στη \mathcal{L} -algebra)

άρα δεξ $\leftarrow 1 = \{ \psi \mid \Gamma \vdash \psi \}$ για $\varphi \in 1$ στη \mathcal{L} .

από $\Gamma \vdash \varphi$ και $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$. Από ορισμό $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$.

Πρόσβ. Έχω γ έναν λογαριθμικό χώρο S_L με $\dim S_L = 1$ και $\dim S_L = 1$ $\epsilon. \omega.$

- H tati şu gvalur ~~tas~~ olagarak xing an olagarak
- H eva ogurdirak gvalur n olagarak xing an olagarak

Η άνωχολη η συνθήκη η ολογράφεται με ο τυπώθηκε χυρό,
 (Ε γκ δωδωζ συνθήκη η πορ γιν 2^ο (Ε), η ολογράφεται

$$\mathbb{I} = (X, J)$$

$O(\Pi) = 20$ Givello nur maximaler Grad, 15f

$$\mathcal{H} = \langle \mathcal{O}(\pi), \cup, \cap, \Rightarrow, \sim, \phi, \chi \rangle \quad \text{auk. algebra Heyting}$$

Ü11a $A \Rightarrow B = \text{Int}(-A \cup B)$, A, B any open sets.

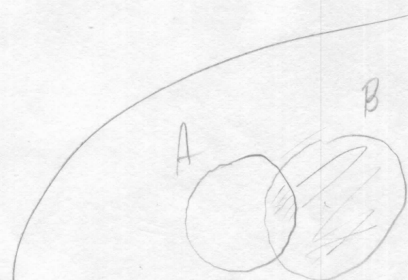
$\sim A = \text{Int}(-A)$ \leftrightarrow — and so for all $G \vdash \perp$

~~Ελαφρύτερα: έαν A, B άνωπι γούνα~~

Find Give a regular ^{avoid} Y such that $A \cap Y \subseteq B$

~~Teilfolge u. Endfolge~~ or ~~$(A \cap Y \subseteq B \Rightarrow Y \subseteq \text{Int}(-A \cup B))$~~

erw $c \in Y \rightarrow c \notin A \rightarrow \cancel{c \in A} \quad c \notin B$

$$c \in A \Rightarrow c \in B \quad \checkmark$$


$$A \cap \overline{A \cup B} \subseteq B$$

Ελέγχου: Απλά να ελέγξουμε αν $\varnothing \subseteq \text{Int}(-A \cup B)$ (A, B οποιαδήποτε)

για $\varnothing \subseteq A \Rightarrow B$. Διότι:

$$A \cap U \subseteq B \iff U \subseteq \text{Int}(-A \cup B) = (-A \cup B)^\circ$$

έχουμε $(-A \cup B)^\circ = \overline{((-A \cup B))}^c = \overline{(A \cap -B)}^c = \overline{(A - B)}^c$

$$\boxed{\text{Γενικά } W^\circ = \overline{(W)}^c}$$

ισχύει πάντα.

άρα

$$\boxed{A \cap U \subseteq B \iff U \subseteq \overline{(A - B)}^c}$$

$$\iff A - B \subseteq -U \quad (-U \text{ closed})$$

$$\iff (A - B)^c \subseteq -U$$

$$\iff U \subseteq \overline{(A - B)}^c \iff U \subseteq (-A \cup B)^\circ$$

Παραδείγματα

1. Ο νόμος του Peirce. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p \equiv \varnothing$

Παίρνουμε ως τοπολογικό χώρο τα ακέραια σύνολα με τη φυσική σειρά.

$$V(p) = \mathbb{R} - \{0\}, V(q) = \emptyset. \text{ Τότε } \llbracket p \rightarrow q \rrbracket_V = \text{Int}(\{0\} \cup \emptyset) = \emptyset$$

$$\llbracket (p \rightarrow q) \rightarrow p \rrbracket_V = \text{Int}(\mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - \{0\})) = \mathbb{R}. \text{ Άρα } \llbracket \varnothing \rrbracket_V = \text{Int}(\emptyset \cup (\mathbb{R} - \{0\})) = \mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$$

Άρα ο \varnothing (νόμος Peirce) δεν ικανοποιείται.

2. Ο νόμος $p \vee \neg p$. Παίρνουμε $V(p) = (0, \infty)$. Τότε $\llbracket p \vee \neg p \rrbracket_V = \llbracket p \rrbracket_V \cup \llbracket p \rightarrow \perp \rrbracket_V$

$$\llbracket p \rightarrow \perp \rrbracket_V = \text{Int}(\neg(0, \infty) \cup \emptyset) = \text{Int}((-\infty, 0]) = (-\infty, 0)$$

$$\text{Άρα } \llbracket p \vee \neg p \rrbracket_V = (0, \infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}.$$