

πονο α το Στοιχειώδες λογισμικό φάρει α αλφες το  
ορθολογισμικό το.

Εξήγηση BHK. | Brouwer  
Heyting  
Kolmogorov

Μπορούμε να ορίσουμε το πως θα την αναλογιστούμε προκειμένου λογισμ

- ΙΡΛ. |
- προτάσεις: πρόβλημα,  $\perp$
  - Συντακτικά:  $\rightarrow, \wedge, \vee$
  - ~~• φάρει~~ • Συντακτικοί- Συντακτικοί  $\neg \phi$  για  $\phi \rightarrow \perp$

$$\phi \leftrightarrow \psi \quad " (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top \quad \text{για } \perp \rightarrow \perp \text{ (δηλ. } \neg \perp)$$

Τα χνάρια του υδατικού έννοιες της "α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ"

Δα υπάρχει α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ ορισμός ή αποδεικνύεται.

~~Δα υπάρχει~~

Δα μπορούμε να προσδιορίσουμε α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ η α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ  
προκειμένου να ελεγχουμε Δα πρέπει, να ελεγχουμε α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ  
ή ή να ελεγχουμε α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ  
το α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ (α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ) α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ.

Το  $\neg \phi \equiv \phi \rightarrow \perp$  ισχύει α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ  
Α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ

το  $\phi \rightarrow \perp$  α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ  
α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ α/β/γ/δ/ε/ζ/η/θ

BHK - σημαίνει  $\neg\neg(p \vee \neg p)$ .

υποθέτουμε. Έστω ότι μας δίνεται η  $\neg(p \vee \neg p)$  δηλ.  $\boxed{p \vee \neg p \rightarrow \perp}$ .

Τότε ως μας δίνεται το  $p$  έχω υποθέσει το  $p \vee \neg p$  οπότε μας δίνει  $\perp$ .

Άρα έχω δεχθεί υποθέτουμε το  $\boxed{\neg p}$ .

Αν μας δίνεται το  $\neg p$ , έχω υποθέσει το  $p \vee \neg p$  οπότε μας δίνει  $\perp$ .

Άρα έχω δεχθεί υποθέτουμε το  $\boxed{\neg p \rightarrow \perp}$  ή  $\boxed{\neg\neg p}$  (δεδομένο)

Άρα & δύο φορές έχω υποθέσει το  $\perp$  (δηλ. το  $\neg(p \vee \neg p)$ ),

δηλαδή έχω υποθέσει το  $\neg\neg(p \vee \neg p)$

Τις δύο  $p \vee \neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$

Έστω  $p \vee \neg p \Rightarrow$  αυτό σημαίνει ότι δίδεται υποθέτουμε το  $p$  ή υποθέτουμε το  $\neg p$

• πρώτα υποθέτουμε  $p$  (δηλ.  $p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$ )

• " "  $\neg p$ . Δηλ. ας πούμε δεχθούμε  $\neg p$  τότε υποθέτουμε το  $\perp$

οπότε από το  $\perp$  υποθέτουμε το  $p$ .

# Ρυθμίσι αγωγών

Υπάρχει δὲ ῥεσόν παρουνίκον  
 πρὸς τὸν ῥεσόν πρὸς τὸν ῥεσόν

1. ο ἄλλος ῥεσόν  $\Gamma \vdash \varphi$  πὸς δὲ ῥεσόν αὐτὸν ἐν τῷ  $Q$  (πρὸς τὸν ῥεσόν)  
 ἔξωθεν αὐτοῦ καὶ ἀντίθετος  $\Gamma$ . Τὸ ῥεσόν ἔχει αὐτὸν

$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$  (Ax)

$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$  ( $\rightarrow I$ )

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$  ( $\rightarrow E$ )

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$  ( $\wedge I$ )

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$  ( $\wedge E$ )

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$  ( $\vee I$ )

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}$  ( $\vee E$ )

$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$  ( $\perp E$ )

$\boxed{NJ}$

2. Na jaxhate v. dadas an form dreguri 1-6

daruri propri, 1-6 paval vadiu, na gura vadiu

Q Gura 12

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} 1$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \end{array}}{\psi} \quad (\text{further vadiu})$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \theta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \theta \end{array}}{\theta} 1$$

$$\frac{\vdots}{\varphi}$$

Παράδειγμα:  $\rightarrow$ -Αξίωμα

1.  $\frac{\varphi \vdash \varphi}{\vdash \varphi \rightarrow \varphi}$

$\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi}$   
 $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$\Gamma = \{ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta), \varphi \rightarrow \psi, \varphi \}$

$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$

$\frac{\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \theta}$

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta), \varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \theta$

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)$

$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

2.  $\frac{[\varphi]^1_1}{\varphi \rightarrow \varphi}$

$\frac{\varphi^2_1}{\psi \rightarrow \varphi} \quad \frac{\psi \rightarrow \varphi}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)}_2$

$[\varphi]^1_1 \leftarrow \text{οιωνού υποθέσει}$

$\frac{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \quad \varphi^1_1}{\psi \rightarrow \theta} \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi^2_1}{\psi}$

$\frac{\theta}{\varphi \rightarrow \theta}_1$

$\frac{\varphi \rightarrow \theta}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)}_2$

$\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)}{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))}_3$

Παράδειγμα

$\frac{\varphi^2 \quad \neg \varphi^1}{\perp}_1$

$\frac{\perp}{\neg \neg \varphi}_1$

$\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi \rightarrow \neg \neg \varphi}_2$

$\frac{\neg \neg \neg \varphi^2 \quad \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi \quad \varphi^1}{\neg \neg \varphi}$

$\frac{\perp}{\neg \varphi}_1$

$\frac{\neg \varphi}{\neg \neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi}_2$

$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi}{\neg \neg \varphi}$

⊥



Σημειολογία (Semantics) - το [σημειολογική] λογισμό

Κλασική λογική: Υπάρχει α αληθοφάνεια με  $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$ . (και  $\perp$ )

$$\mu_f \sim 1 \text{ (at } O_G) \text{ на } O(\psi_{\text{св}}).$$

Συμπέρασμα είναι τα  $\cup, \cap, \neg$  (ανάλογα) και  $A \rightarrow B \equiv \neg A \cup B$   
(ανάλογα από τον) law  $\rightarrow$ .

O1 cardinals stellen eine O1-Tautologie - auch für Parameter in  $\{0, 1\}$  & viele Aussagen im Prädikatenkalkül (z.B.  $\alpha \vdash \neg(\neg \alpha)$ ).  $\{0, 1\}$ .

Exakte für propositionalen Setzen Ob  $\{0,1\}$  für  $\vee, \wedge, \neg$   $\left[ \begin{array}{l} 0 \vee 1 = 1 \\ 0 \wedge 1 = 0 \\ \neg 0 = 1 \text{ u. d. } \neg \end{array} \right]$   
 [Genau für die 0-1  $0 \leq 1$   $[a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1]$

Мораторий на сирену од 80% је уведен А.

Apilake sto mu enox kon lattire (sivk-fa).

lattice

- $\langle A, \leq \rangle$ ,  $\cdot \leq$  μερικώς διατεταγμένη
- $\forall a, b \in A$ ,  $a \cup b =$  ελάχιστο άνω φράγμα  $a, b$  (join) ένωση
- $a \cap b =$  μέγιστο κάτω φράγμα  $a, b$  (meet) τομή
- Το μέγιστο (αυ υπάρχει) είναι το 1
- Το ελάχιστο (— " —) — " — 0

Παρατήρηση: Μπορούμε να δορί  
ως συνάρτηση  $\langle P(A), \subseteq, \cup, \cap \rangle \begin{cases} A \text{ μέρα} \\ \emptyset \text{ ετήσια} \end{cases}$

Indukcja  $\left\{ \begin{array}{l} \cdot a \leq b \\ \cdot a \cap b = a \\ \cdot a \cup b = b \end{array} \right.$

Παρατήρηση: ①  $B = \{0, 1\}$  με  $0 \leq 1$ .

② A. A ungerade Anzahl und eine grösse Zahl hat es ergeben

③ H orthogonal oder nur unitär sein zu  $\mathbb{R}^2$ . [oder je in  $\mathbb{R}^2$ ]