

Τα ανωτέρω 2 ισχύουν σε κάθε lattice

$$\begin{aligned} a \cup a &= a & a \cap a &= a \\ a \cup b &= b \cup a & a \cap b &= b \cap a \\ (a \cup b) \cap c &= a \cap (b \cap c) & (a \cap b) \cup c &= a \cup (b \cup c) \\ (a \cup b) \cap a &= a & (a \cap b) \cup a &= a \end{aligned}$$

Ορίσιν: Distributive (Επιμεριστική) lattice
Ερετη

- $(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c)$
- $(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$

Ορίσιν: Αν το lattice A έχει 1 και 0 τότε λέμε ότι
 b είναι συμπλήρωτο (complement) του $a \iff a \cup b = 1$ και $a \cap b = 0$.

Πρόταση: Έστω b είναι συμπλήρωτο του a σε distributive lattice.
 Τότε b είναι το μέγιστο στοιχείο του A που ικανοποιεί το $a \cap b = 0$
 (οπότε a έχει το πολύ ένα συμπλήρωτο).

Απόδειξη: Στην $C = 1 \cap C = (a \cup b) \cap C = (a \cap C) \cup (b \cap C) = 0 \cup (b \cap C) = b \cap C$

δηλ. $c = b \cap c \Rightarrow c \leq b$.

Δοκιμάστε το
 με $a \cap x = 0$
 να δείξετε $x \leq b$.

Έστω $a \cap c = 0$
 τότε $c \leq b$

Παρατήρηση: Για να το αποτέλεσμα χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι
 το a έχει συμπλήρωτο (αρκεί να ισχύει ότι υπάρχει Bode
 αλλά όχι όταν δεν υπάρχει Heyting).

Ορισμός: Αλγέβρα Boole = Distributive lattice B με 0 και 1
 ε.ω. κάθε στοιχείο a έχει συμπλήρωμα που το συμβολίζουμε με $\neg a$.

δηλ. $B = \langle B, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1 \rangle$. (και να παρουσιάζουμε την
 σχέση $a \leq b \iff a \sqcap b = a$)

Παραδείγματα

- Field of sets over X . Για ένα υποσύνολο R το $\mathcal{P}(X)$ είναι π.
 (πρόσθετο σύνολο) \sqcup, \sqcap, \neg .

• Παραδειγμα στο field of sets

• $\mathcal{P}(X)$ - το σύνολο

• $\{\emptyset, X\}$

• $\{A \in X \mid A \text{ περιφράζεται ή } X-A \text{ περιφράζεται}\}$.

το $\{\emptyset, X\}$ είναι ισομορφισμός με το $\{0, 1\}$

Το συμπλήρωμα στο Stone

Κάθε αλγέβρα Boole είναι ισομορφισμός με ένα field of sets.

Διεύρυνση της βολιολογίας

Αν \mathcal{P} με $\{0,1\}$ χαρακτηριστικά (i.e. αλγεβρά Boole) ορισμένα

$$\text{έστω } B = \langle B, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1 \rangle$$

Αποστέλλει στη B ανάλογοι υπό της συνάρτησης $V: \{\text{προκαταρκτική p.}\} \rightarrow B$.

Επέκταση της V στα τελεστικά ως εξής φ : [επέκταση στη φ].

φ	$\bar{V}(\varphi)$
p	$V(p)$
\perp	0
$\psi \vee \chi$	$\bar{V}(\psi) \sqcup \bar{V}(\chi)$
$\psi \wedge \chi$	$\bar{V}(\psi) \sqcap \bar{V}(\chi)$
όχι αληθές $\neg \psi$	$-\bar{V}(\psi)$
$\psi \rightarrow \chi$	$-\bar{V}(\psi) \sqcup \bar{V}(\chi)$

$$\text{Γράψτε και } \bar{V}(\varphi) = \llbracket \varphi \rrbracket_V$$

Αν \neg συνάρτηση \neg έχει
χαρακτηριστικό $\neg 0 \rightarrow 1$ και $\neg 1 \rightarrow 0$

$$\neg \varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$$

$$\text{Γράψτε } B, V \models \varphi \text{ αν } \llbracket \varphi \rrbracket_V = 1$$

$$B \models \varphi \iff B, V \models \varphi, \text{ για κάθε αποστέλλει } V.$$

Θεώρημα: φ είναι (υλιστική) ταυτολογία $\iff B \models \varphi$ για κάθε αλγεβρά Boole B.

Απόδειξη: \Leftarrow : Προσφέρει διευκρινιστική \Leftarrow περιορισμένη στη $B = \{0,1\}$.

\Rightarrow : έστω αλγεβρά B χωρίς $B \models \varphi$. Από διάφορα Stone (i.e. Stone) \Leftarrow υποδιόριστο στη B ως πεδίο αλγεβρών. Έστω $B \models \varphi$, υπάρχει αποστέλλει V στη B
όπου $\llbracket \varphi \rrbracket_V \neq 1$. Αλλά υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \notin \llbracket \varphi \rrbracket_V$.

Notation

$$\bar{V}(\varphi) = \llbracket \varphi \rrbracket_V$$

Ορίστηκε διττή αποστέλλει W στο $B = \{0,1\}$ ως εξής:

$$W(p) = \begin{cases} 1 & \text{αν } p \in \llbracket p \rrbracket_V \\ 0 & \text{αν } p \notin \llbracket p \rrbracket_V \end{cases} \quad \not\Rightarrow \text{(επέκταση στο } \varphi) \quad \llbracket \varphi \rrbracket_W = 1 \iff x \in \llbracket \varphi \rrbracket_V \quad \left(\begin{array}{l} \text{όχι} \\ \llbracket \varphi \rrbracket_W \neq 1 \end{array} \right)$$

επόμενο \rightarrow

Επαγωγή σε φ

$$\varphi \equiv p: \quad \overline{w}(p) = 1 \Leftrightarrow z \in \overline{V}(p) \quad \checkmark$$

$$\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2: \quad \overline{w}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1 \Leftrightarrow \overline{w}(\varphi_1) = 1 \ \& \ \overline{w}(\varphi_2) = 1$$

$$\stackrel{\text{ε.γ.}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{V}(\varphi_1) \ \Delta \ x \in \overline{V}(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{V}(\varphi_1) \cap \overline{V}(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{V}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2: \quad \overline{w}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 1 \Leftrightarrow \overline{w}(\varphi_1) = 1 \quad \eta \quad \overline{w}(\varphi_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{V}(\varphi_1) \quad \eta \quad x \in \overline{V}(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{V}(\varphi_1) \cup \overline{V}(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{V}(\varphi_1 \vee \varphi_2)$$

$$\varphi \equiv \perp$$

$$\overline{w}(\perp) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{V}(\perp)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\varphi \equiv \varphi_1 \rightarrow \varphi_2:$$

$$\overline{w}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = 1 \Leftrightarrow \overline{w}(\varphi_1) = 0 \quad \eta \quad \overline{w}(\varphi_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow x \notin \overline{V}(\varphi_1) \quad \eta \quad x \in \overline{V}(\varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow \overline{V}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = 1$$

$$\overline{V}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = 1$$

$$\overline{V}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = \neg \overline{V}(\varphi_1) \cup \overline{V}(\varphi_2)$$

$$x \in \overline{V}(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow x \notin \overline{V}(\varphi_1) \quad \eta \quad x \in \overline{V}(\varphi_2)$$

Σημειώσεις 'Ηγεσίας

Κατασκευάζουμε, πάνω στη θεωρία των σχέσεων Boole, τη διαμετρική αντιστοιχία του πλέγματος των δύο Additival. Ενεργώντας να προσεγγίσουμε αυτή τη θεωρία ως algebra Boole ως να προσεγγίσουμε το σχέδιο πλέγματος ως το πλέγματος των μοτίβων των λογικών προτάσεων ~~και~~ όπου η διαμετρική αντιστοιχία με algebra - των Boole χρησιμοποιούμε ως εργαλείο πάνω του οποίου θα φέρουμε τη μοτίβων των λογικών.

Τότε ισχύει το σχήμα

- $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \phi$
- $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \ \& \ \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \chi$

Π. η σχέση $\phi \leq \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ οφείλεται ως μέτρο διαίρεσης και είναι η, δίνει τη συνθετικότητα.

(Όταν $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \ \& \ \Gamma \vdash \psi \rightarrow \phi$, τότε $\Gamma \vdash \phi \leftrightarrow \psi$ θα αντιστοιχεί $\phi = \psi$.)

αυτό σημαίνει θεωρία ~~των~~ ιδιοτήτων induction $|\phi|_n$ δηλαδή σχέση $|\phi|_n \leq |\psi|_n \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$. Τότε βέβαια.

$$\textcircled{\textcircled{\textcircled{\phi}}} \quad |\phi|_n = |\psi|_n \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \leftrightarrow \psi$$

και $|\phi|_n \leq |\psi|_n \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ είναι μέτρο διαίρεσης

Έστω $\mathcal{A}_\Gamma = \Phi / \sim = \{|\phi|_n \mid \phi \in \Phi\}$ $|\underline{\phi}| = \text{αριθμός των λογικών προτάσεων}$

η δομή $\langle \mathcal{A}_\Gamma, \leq \rangle$ είναι συνδεμένη (lattice);

ορίζεται
$$\left. \begin{aligned} |\phi| \sqcup |\psi| &= |\phi \vee \psi| \\ |\phi| \sqcap |\psi| &= |\phi \wedge \psi| \end{aligned} \right\} \text{ καθώς ορίζεται}$$

$1_\perp = \{\phi \mid \Gamma \vdash \perp\} \quad \text{και} \quad 1_\top = \{\phi \mid \Gamma \vdash \phi\} \quad (\top \equiv \perp \rightarrow \perp)$

$1_\perp, 1_\top$ αντιστοιχούν στο 0 και 1.

Erdoğan Heydus

Καταρχάς, βέβαια την ανάλυση της σχέσης Boole, η διαφορά η
στην αν- του παλίου και στο Additive. Εξαιτίας να προσέχουμε
επειδή λίγο την εννοία της σχέσης Boole ως η προσέχουμε
έχουμε την ουσία η η ανάλυση Boole η η προσέχουμε
προσέχουμε η η προσέχουμε η η προσέχουμε η η προσέχουμε
η η προσέχουμε η η προσέχουμε η η προσέχουμε η η προσέχουμε

Τα κατά Γ ΕΧΟΥΣ

- $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$
- $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \ \& \ \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$

• $\vdash \varphi \rightarrow \psi \wedge \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \vdash \varphi \rightarrow \chi$

π. η σχέση $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$ συμπεριφέρεται ως μέρος διαίστα

~~και~~ ενώ τα, δίνοντας τα αντίστοιχα.

(Since $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftarrow \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, all $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ is equivalent $\varphi = \psi$.)

αυτό Γεγονέται θεωρώντας ~~τα~~ όλα \mathcal{L} μοναδικά $| \varphi |_N$ σε \mathcal{L}_N
μοναδικά $\varphi \mapsto \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Τότε βέβαια.

$$\cancel{\text{scribbles}} \quad |\varphi|_n = |\psi|_n \iff \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

και $\boxed{|\varphi|_{\sim} \leq |\psi|_{\sim} \iff \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$. Είναι μάλιστα βίβλος

Es sei $\mathcal{A}_r = \Phi / \sim = \{[\varphi]_\sim \mid \varphi \in \Phi\}$ | $\underline{\Phi}$ = Größe der Witten
- population

n Supri $\langle A_r, \leq \rangle$ erke sarfati; (lattice;)

$$\begin{aligned} \varphi_i \text{ bzw. } \in \quad & \left. \begin{aligned} |\varphi| \sqcup |\psi| &= |\varphi \vee \psi| \\ |\varphi| \sqcap |\psi| &= |\varphi \wedge \psi| \end{aligned} \right\} \text{ nach } \text{or, and}$$

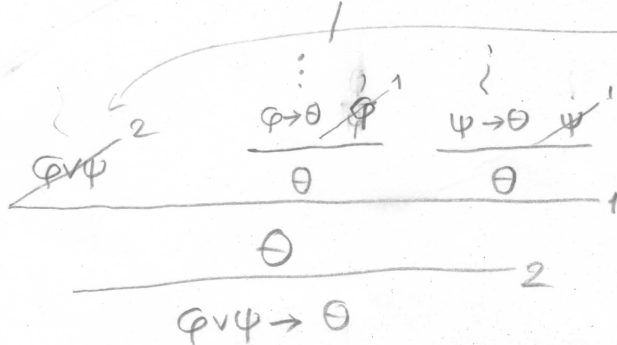
$$|\perp| = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\} \quad \text{and} \quad |\top| = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\} \quad (\top \equiv \perp \rightarrow \perp)$$

$|L|, |T|$ are unknown to O and I .

Θέση Προσέταξε σε \mathcal{A} $\langle \mathcal{A}, \leq \rangle$ μια lattice

Π είναι join:

πρώτα $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \phi \vee \psi$ & $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \phi \vee \psi$
 Αν $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \theta$ & $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$ τότε $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \rightarrow \theta$

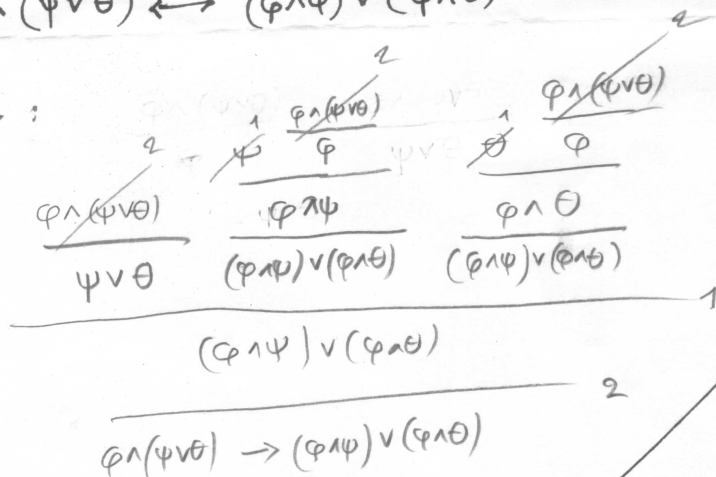


Το lattice και επιμερισμός είναι

$$|\phi| \wedge (|\psi| \vee |\theta|) = (|\phi| \wedge |\psi|) \vee (|\phi| \wedge |\theta|) \text{ και}$$

$$\Gamma \vdash \phi \wedge (\psi \vee \theta) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)$$

π.κ. $\phi \rightarrow :$



Η \mathcal{A} είναι
 algebra - Lindenbaum

Ερώτηση: Είναι η \mathcal{A} algebra Boole? Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει για κάθε ϕ να υπάρχει ϕ συμπληρωμα του (ας πούμε $\neg \phi$) ώστε $|\phi| \vee |\neg \phi| = \top$ ή $\Gamma \vdash (\phi \vee \neg \phi) \leftrightarrow \top$. Αλλά αυτό δε συμβαίνει, [βλέπουμε $\Gamma \vdash (\phi \wedge \neg \phi) \leftrightarrow \perp$]. Τι είναι αυτή algebra που $\neg a$ για a είναι a ; Γνωρίζουμε b ώστε $a \wedge b = 0$. Με βάση αυτό προσπαθούμε να συμπληρώσουμε την νέα Algebra για να είναι join-semilattice.

Ορισμός Το **βήμα** ψευδο-οφελήματα των a σε σχέση με το b

Given λ is a regular cardinal $\leq \aleph_1$ lattice with $a \wedge b \leq c$.

Tier 40 \subset 40 symbols as $a \Rightarrow b$.

501 66102 19.1

Erläuterung: $-a \stackrel{!}{=} a \Rightarrow 0$.

Στην algebra A_T , το έχουμε οριστεί να έχουμε $|\varphi|$ και $|\psi|$

Give \sim on $| \varphi \rightarrow \psi |$. $\Delta \vdash | \varphi | \Rightarrow | \psi | = | \varphi \rightarrow \psi |$.

Δ_{121}

$$\bullet \Gamma \vdash \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \longrightarrow \psi$$

2. $\Gamma \vdash \phi \wedge \theta \rightarrow \psi$ ~~Assume~~ $\Gamma \vdash \theta \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$

$$\frac{\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad 1}{\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} 2$$

Ques: Algebra Heyting ω -c.c. \Rightarrow Σ_1 -c.c. lattice $\#$

Γε. Μερικοί από παλ. (top, bottom) είναι από γκ. από $a, b \in H$ παρ. 15

2) ցիբինո բաժնիկի $a \Rightarrow b$.

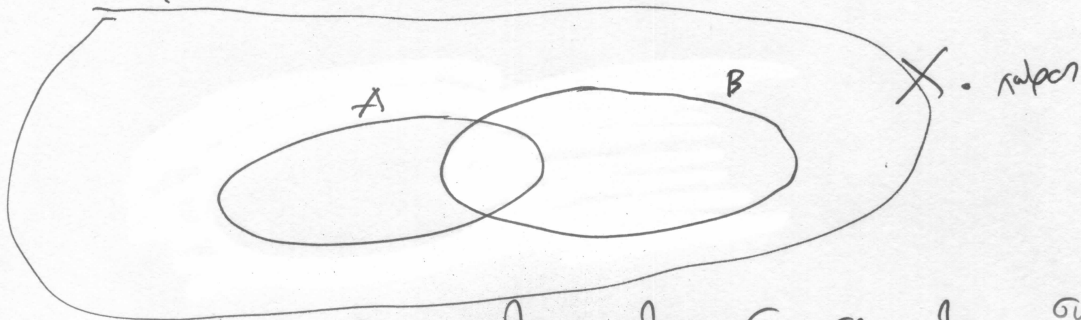
Παραύαξ: $\mathcal{H} = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ (με $a \leq b \stackrel{(\ast)}{\iff} a \sqcap b = 0$)

19.1

Στις αλγεbras Boole που αν field of sets πάλι αν
το « σχέσιω ψευδ-συντεταγμένη » αν A σε σχέση με B ;

δύνα $A \Rightarrow B$;

Εκ αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$.



Αν $A \subseteq B$ βλέπουμε αν $A \cap B = A$ αν A σε σχέση με B .

Αν A σε σχέση με B τότε $A \cap B = A$ δύνανται

$$\bar{A} \cup (A \cap B)$$

$$\text{Αλλά } \bar{A} \cup (A \cap B) = (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup B) = X \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A} \cup B.$$

↑
όλο το χώρο

όπως φαίνεται. Καν $A \subseteq B$ αν $\bar{A} = A \Rightarrow \emptyset$

$$\bar{A} \cup \emptyset = \bar{A} \cup \emptyset = \bar{A}.$$

Επειδή αν L αλγεbras Boole αν intuitionistic logic
δεν έχουμε $\bar{A} \cup (A \cap B) = \bar{A} \cup B$ αν $A \subseteq B$ αν
ψευδ-συντεταγμένη αν $a \subseteq b$ αν $a \Rightarrow b$

$$a \Rightarrow b.$$