Μοντέλα Kripke.

Ιδέα: Κατασκευαστικά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάτι είναι σωστό μόνο εάν βεβαιωθούμε γι' αυτό. Αλλά, προϊόντος του χρόνου, μαθαίνουμε καινούργια πράγματα αποκτώντας νέα πληροφορία και μπορεί να προσθέσουμε νέα γνώση στη γνώση μας. Αλλά ~~..~~ ό,τι βεβαιωθεί, παραμένει ισχυρό για πάντα, και ό,τι δεν αναγνωρίζεται σήμερα μπορεί να γίνει αληθές αύριο. Άρα π.χ. για να δικαιώσουμε τη βεβαίωση του όχι A πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι σε κάθε μελλοντική εξέλιξη (σε απεριόριστη) να μην μπορέσουμε να βεβαιωθούμε για το A

Μοντέλο Kripke $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$

- C: καταστάσεις ή δυνατοί κόσμοι
- $\leq$: μερική διάταξη στο C
- $\Vdash$: διμελής σχέση μεταξύ στοιχείων του C και προτασιακών μεταβλητών

Διαβάζουμε $c \Vdash p$ "το c εξαναγκάζει το p".

Ισχύει: αν $c \leq c'$ και $c \Vdash p$ τότε $c' \Vdash p$.

Ορισμοί: Αν $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ είναι μοντέλο Kripke τότε

Ισχύει η monotonity δηλαδή: Αν $c \leq c'$ & $c \Vdash \varphi$ τότε $c' \Vdash \varphi$.

- $c \Vdash \varphi \vee \psi \iff c \Vdash \varphi$ ή $c \Vdash \psi$
- $c \Vdash \varphi \wedge \psi \iff c \Vdash \varphi$ και $c \Vdash \psi$
- $c \Vdash \varphi \to \psi \iff c' \Vdash \psi$ για όλα τα $c' \geq c$ με $c' \Vdash \varphi$

  δηλ. $\forall c' \geq c \, (c' \Vdash \varphi \Rightarrow c' \Vdash \psi)$
- $c \Vdash \bot$ δεν ισχύει

Άρα
- $c \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \forall c' \geq c, \; c' \nVdash \varphi$.

Παράδειγμα:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & c' \cdot p \\ c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c'' \cdot q \end{tikzcd}$$

δηλ. $C = \{c, c', c''\}$ $\quad \leq : \left.\begin{matrix} c \leq c' \\ c \leq c'' \end{matrix}\right\}$

$\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ με $c' \Vdash p$, $c'' \Vdash q$, $c \nVdash p, q$

Τότε έχουμε: $c \Vdash \neg\neg(p \vee q)$ | πρέπει $c, c', c'' \nVdash \neg(p \vee q)$
αλλά $c, c', c'' \Vdash p \vee q$

$c \Vdash (p \to q) \to q$ | αφού για κάθε $d \geq c$ είναι $d \Vdash (p \to q)$ τότε $d \Vdash q$.
Το d είναι c, c', c''

· Για το c, είναι $c \Vdash p \to q$? όχι διότι $c' \Vdash p$ αλλά $c' \nVdash q$

· Για το c', $c' \Vdash p \to q$? —״— $c' \Vdash p$ ״ $c' \nVdash q$

· Για το c'', $c'' \Vdash p \to q$? , ναι! διότι δεν διαψεύδεται με $c'' \Vdash p$ και $c'' \nVdash q$

άρα σ' αυτή την περίπτωση πρέπει $c'' \Vdash q$ που ισχύει

$c \nVdash p \vee \neg p$. Διότι θα έπρεπε, $c \Vdash p$ ή $c \Vdash \neg p$.
Το πρώτο δεν ισχύει και το δεύτερο για να ισχύει θα έπρεπε
$c' \nVdash p$ πράγμα που δεν συμβαίνει

Ορισμός: Έστω $\mathcal{H} = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ άλγεβρα Heyting.

Φίλτρο της άλγεβρας αυτής είναι ένα $\emptyset \neq F \subseteq H$ ώστε

- $a, b \in F \Rightarrow a \sqcap b \in F$
- $a \in F$ και $a \leq b \Rightarrow b \in F$

Το φίλτρο F είναι γνήσιο αν $F \neq H$.

Το γνήσιο φίλτρο F είναι πρώτο αν $a \sqcup b \in F$ συνεπάγεται $a \in F$ ή $b \in F$.

(Εποπτεία: Το φίλτρο είναι ένα αφηρημένο ανάλογο (γενίκευση) του «state of knowledge»)

Λήμμα: Έστω $A \subseteq H$. Τότε το

$$F = \{a \in H \mid a \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k, \text{ για κάποια } a_1, \dots, a_k \in A\}$$

είναι το ελάχιστο φίλτρο που περιέχει το A.

Το ως άνω φίλτρο F είναι γνήσιο $\iff$ $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k \neq 0$ για όλα τα $\underbrace{\{a_1, \dots, a_k\}}_{\text{πεπερασμένα}} \subseteq A$.

Απόδειξη: • Αν $a, b \in F$ $\left.\begin{matrix} a \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k \\ b \geq b_1 \sqcap \dots \sqcap b_m \end{matrix}\right) \Rightarrow a \sqcap b \geq (a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k) \sqcap (b_1 \dots b_m)$

• Αν $a \in F$ και $a \leq b$: $a \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k$ και $b \geq a \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k \Rightarrow b \in F$

Το F είναι το ελάχιστο: Διότι έστω G φίλτρο και $G \supseteq A$ και $a \in A$.

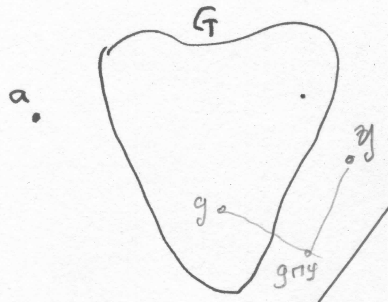
Τότε $a \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k$ με $a_1, \dots, a_k \in A \subseteq G$ άρα $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k \in G$ και άρα $a \in G$.

- έστω F γνήσιο ώστε αν $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k = 0$, κάθε στοιχείο του H ανήκει στο F ⨳
- Αν $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k \neq 0$ για όλα τα $\{a_1 \dots a_k\} \subseteq A$. Τότε το $0 \notin F$ διότι αν υποθέσουμε $0 \geq a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k$ άρα και $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_k = 0$ ⨳.

Λήμμα: Έστω F γνήσιο φίλτρο της H και $a \notin F$. Τότε υπάρχει πρώτο φίλτρο G ώστε $F \subseteq G$ και $a \notin G$.

Απόδειξη: Πρώτο βήμα: Έστω $\mathcal{F} = \{E \mid E \text{ φίλτρο και } F \subseteq E \text{ και } a \notin E\}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι η ένωση κάθε αλυσίδας στο $\mathcal{F}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$. [εύκολο]
Τότε από Zorn η οικογένεια $\mathcal{F}$ έχει μεγιστικό στοιχείο G (που βεβαίως είναι φίλτρο που δεν περιέχει το a).

Δεύτερο βήμα: Θα αποδείξουμε ότι το G είναι πρώτο φίλτρο.



$G \supseteq F$, μεγιστικό και $a \notin G$.

Αν $y \in H$, $G_y = \{x \mid x \geq g \sqcap y$, για κάποιο $g \in G\}$

Τότε το G_y είναι φίλτρο.

<u>Ισχυρισμός:</u> Αν $b \sqcup c \in G$ τότε ένα από τα G_b ή G_c ανήκει στο $\mathcal{F}$.

Άρα επειδή $y \in G_y$ αν π.χ. $G_b \in \mathcal{F}$ τότε πρέπει $b \in G$ από τη μεγιστικότητα του G.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού:</u> Έστω όχι και άρα $b \sqcup c \in G$ και αμφότερα $G_b, G_c \notin \mathcal{F}$

Τότε $a \in G_b \cap G_c$ και $\exists g_1, g_2 \in G$ ώστε
$$\left. \begin{array}{r} g_1 \sqcap b \leq a \\ g_2 \sqcap c \leq a \end{array} \right|$$

Τότε $(g_1 \sqcap g_2) \sqcap (b \sqcup c) \in G$ και έχουμε ότι

$$a = a \sqcup a \geq (g_1 \sqcap g_2 \sqcap b) \sqcup (g_1 \sqcap g_2 \sqcap c) = (g_1 \sqcap g_2) \sqcap (b \sqcup c)$$

άρα $a \in G$ #.

<u>Λήμμα:</u> Έστω V αποτίμηση σε άλγεβρα Heyting $\mathcal{H}$, με $0 \neq 1$.
Υπάρχει μοντέλο Kripke $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ ώστε οι συνθήκες

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{H}, V \models \varphi \\ \mathcal{C} \Vdash \varphi \end{array} \right.$$ και

$\boxed{\mathcal{C} \Vdash \varphi \text{ αν } c \Vdash \varphi \text{ για όλα τα } c}$

είναι ισοδύναμες για όλα τα φ.

(δηλ. η αποτίμηση αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο Kripke)

Απόδειξη λήμματος:

ορίζουμε C = το σύνολο όλων των πρώτων φίλτρων στην $\mathcal{H}$.

$\leq$ είναι η $\subseteq$.

και

$$F \Vdash p \overset{\text{op}}{\iff} V(p) \in F.$$

Θα αποδείξουμε ότι για όλα τα ψ έχουμε (με επαγωγή στο ψ).

$$F \Vdash \psi \iff [\![\psi]\!]_V \in F \quad (*)$$

π.χ. $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ τότε $[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]_V \in F \iff [\![\psi_1]\!]_V \sqcup [\![\psi_2]\!]_V \in F$

$\overset{F\text{ prime}}{\iff} [\![\psi_1]\!]_V \in F$ ή $[\![\psi_2]\!]_V \in F$

$\overset{\text{E.Y.}}{\iff} F \Vdash \psi_1$ ή $F \Vdash \psi_2 \in F$

$\iff F \Vdash \psi_1 \vee \psi_2$

Μη τετριμμένη περίπτωση $\psi = \psi' \to \psi''$

έστω $F \Vdash \psi' \to \psi''$ αλλά $[\![\psi' \to \psi'']\!]_V = [\![\psi']\!]_V \Rightarrow [\![\psi'']\!]_V \notin F$.

Θεωρούμε το ελάχιστο φίλτρο G' που περιέχει το $F \cup \{[\![\psi']\!]_V\}$.

Από λήμμα □ $G' = \{b \mid b \geq f \sqcap [\![\psi']\!]_V$, για κάποιο $f \in F\}$

και βέβαια έχουμε $[\![\psi'']\!]_V \notin G'$, δηλ. G' είναι γνήσιο φίλτρο. (από $[\![\psi']\!] \Rightarrow [\![\psi'']\!] \notin F$)

Από προηγούμενο λήμμα, επεκτείνουμε το G' σε ένα πρώτο φίλτρο G που δεν περιέχει το $[\![\psi'']\!]_V$. Από Ε.Υ. $G \Vdash \psi'$, επειδή: $[\![\psi']\!]_V \in G$. Επειδή $F \Vdash \psi' \to \psi''$ έπεται ότι $G \Vdash \psi''$, δηλ. $[\![\psi'']\!]_V \in G$ $\#$.

Για το αντίστροφο έστω $[\![\psi' \to \psi'']\!]_V \in F$ και $F \subseteq G \Vdash \psi'$.

Από Ε.Υ. $[\![\psi']\!]_V \in G$ και επειδή $F \subseteq G$, παίρνουμε $[\![\psi']\!]_V \Rightarrow [\![\psi'']\!]_V \in G$.

Αλλά $[\![\psi'']\!]_V \geq [\![\psi']\!]_V \sqcap ([\![\psi']\!]_V \Rightarrow [\![\psi'']\!]_V) \in G$ άρα $[\![\psi'']\!]_V \in G$.

$\overset{E.Y.}{\Longrightarrow} G \Vdash \psi''$

έστω τώρα $\mathcal{H}, V \not\models \varphi$ δηλ. $[\![\varphi]\!]_V \notin \{1\}$. Το φίλτρο $\{1\}$ επεκτείνεται σε πρώτο φίλτρο G ώστε $[\![\varphi]\!]_V \notin V$ και άρα $C, G \not\Vdash \varphi$.

Αν όμως $\mathcal{H}, V \models \varphi$ τότε $[\![\varphi]\!]_V = 1$ και 1 ανήκει σε όλα τα φίλτρα του $\mathcal{H}$.

Θεώρημα της πληρότητας: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

$$\Gamma \vdash \varphi \; , \quad \Gamma \models \varphi \; , \quad \Gamma \Vdash \varphi$$

ισχία, επαγωγή, ισχία, δευτέρα ιδιότητα.

Απόδειξη: ① $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$ (επαγωγή στο $\Gamma \vdash \varphi$)

αυτό σημαίνει ότι για κάθε Kripke model C και κάθε state c η ισχύουσα $C, c \Vdash \Gamma$ συνεπάγεται $C, c \Vdash \varphi$.

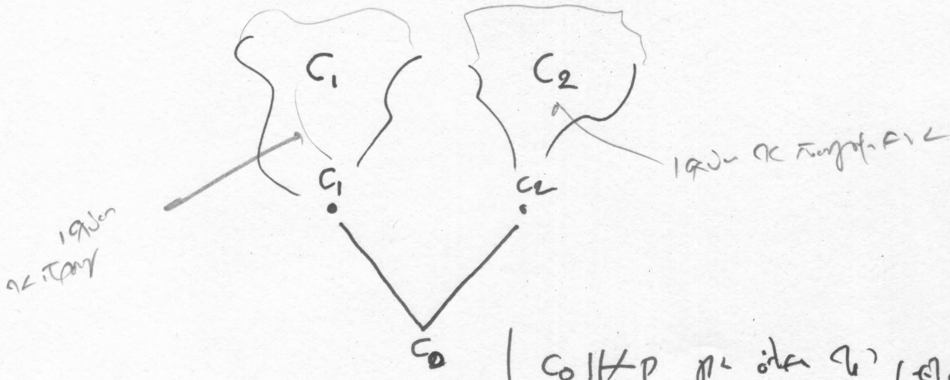
Πόρισμα: (Ιδιότητα διάζευξης) Αν $\vdash \varphi \vee \psi$ τότε $\vdash \varphi$ ή $\vdash \psi$.

Απόδειξη: Έστω $\vdash \varphi \vee \psi$ και $\not\Vdash \varphi$ και $\not\Vdash \psi$.

Τότε υπάρχουν $C_1 = \langle C_1, \leq_1, \Vdash_1 \rangle$ και $C_2 = \langle C_2, \leq_2, \Vdash_2 \rangle$ και $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$ ώστε $c_1 \not\Vdash \varphi$ και $c_2 \not\Vdash \psi$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι c_1, c_2 είναι ελάχιστα στοιχεία των C_1, C_2 αντίστοιχα και $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Ορίζουμε $C = \langle C_1 \cup C_2 \cup \{c_0\}, \leq, \Vdash \rangle$



| $c_0 \not\Vdash p$ για όλα τα μεταβλητές p.

C είναι μοντέλο Kripke. και | $C_1, c_1 \Vdash \theta \iff C, c_1 \Vdash \theta$ και το ίδιο για το c_2.

Έστω τώρα $\vdash \varphi \vee \psi$. Από ορθότητα $c_0 \Vdash \varphi \vee \psi$ άρα

είτε $c_0 \Vdash \varphi$ ή $c_0 \Vdash \psi$. ~~άρα $c_1 \Vdash \varphi$ ή $c_2 \Vdash$~~

Από monotonicity, $c_1 \Vdash \varphi$ ή $c_2 \Vdash \varphi$ (άτοπο).

~~Οπότε αφού $C_1 \not\Vdash \varphi$ έχουμε $c_1 \not\Vdash \varphi$~~

~~" $C_2 \not\Vdash \psi$ " $c_2 \not\Vdash \psi$~~ άρα

$C_1 \Vdash \varphi$ ή $C_2 \Vdash \psi$ #

Καθαρή . Συνεπαγωγή

Η γλώσσα περιέχει μόνο το $\rightarrow$ (και προφανώς μεταβλητές). Τότε η αναφέρουμε το σύστημα $NJ(\rightarrow)$.

Θεώρημα: $NJ(\rightarrow)$ είναι πλήρες ως προς τα μοντέλα Kripke. $(\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi)$.

Απόδειξη: Η ορθότητα έπεται από την ορθότητα του πλήρους συστήματος. Για την πληρότητα υποθέτουμε ότι $\Gamma \Vdash \varphi$.

Ορίζουμε $Con(\Delta)=\{\psi \mid \Delta \vdash \psi\}$ και θεωρούμε μοντέλο Kripke

$G=\langle C, \subseteq, \Vdash \rangle$ όπου $C=\{\Delta \mid \Gamma \subseteq \Delta$ και $Con(\Delta)=\Delta\}$

όπου η διάταξη είναι η $\subseteq$ και $\Delta \Vdash p \overset{op}{\Leftrightarrow} p \in \Delta$. Ισχύει το εξής:

$*$ $\quad \Delta \Vdash \psi \Leftrightarrow \psi \in \Delta$, για όλες τις ψ με μόνο συνεπαγωγή και για όλα τα states Δ.

Απόδειξη του $*$ με επαγωγή στο ψ.

- $\psi = p$ από ορισμό.
- $\psi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$ και έστω $\Delta \Vdash \psi$. Για να δείξουμε ότι $\psi \in \Delta$ παίρνουμε $\Delta' = \{\theta \mid \Delta, \psi_1 \vdash \theta\}$. Τότε $\psi_1 \in \Delta'$ και Ε.Υ. $\Delta' \Vdash \psi_1$. Άρα $\Delta' \Vdash \psi_2$ επειδή $\Delta \subseteq \Delta'$, οπότε $\psi_2 \in \Delta'$ (από Ε.Υ.) δηλ. $\Delta, \psi_1 \vdash \psi_2$ και $\Delta \vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$

Τώρα έστω $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \in \Delta$ (άρα $\Delta \vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$) και έστω $\Delta' \supseteq \Delta$ με $\Delta' \Vdash \psi_1$. Τότε $\psi_1 \in \Delta'$, άρα $\Delta' \vdash \psi_1$. Επίσης $\Delta' \vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$ επειδή $\Delta \subseteq \Delta'$. Από $\rightarrow$ elimination παίρνουμε $\Delta' \vdash \psi_2$ οπότε από Ε.Υ. $\Delta' \Vdash \psi_2$. Άρα η $*$ αποδείχθηκε.

Έστω τώρα $\Delta = \{\psi \mid \Gamma \vdash \psi\}$ τότε $\Delta \in C$ και από $(*)$ $\Delta \Vdash \gamma$, για όλα τα $\gamma \in \Gamma$, αλλά $\Delta \not\Vdash \varphi$.