(Πόρισμα)

<u>Θεώρημα</u>: Αν μία συνεπαγωγική πρόταση αποδεικνύεται σε πλήρες σύστημα τότε αποδεικνύεται μόνον στο συνεπαγωγικό τμήμα του.

λ-λογισμός με απλούς τύπους (μόνο →) (à la Curry)

- $\Gamma = x_1:\tau_1, \ldots, x_n:\tau_n$ η έννοια του περιβάλλοντος.

  $dom(\Gamma)$, $rg(\Gamma)$.

- $\Gamma \vdash M : \tau$, κανόνες τυποποίησης.

- π.χ. αν σ, τ, ρ τύποι.

  $I = \lambda x.x$, $\vdash I : \sigma \to \sigma$

  $K = \lambda x \lambda y.x$, $\vdash K : \sigma \to (\tau \to \sigma)$

  $S = \lambda x \lambda y \lambda z.\, xz(yz)$, ~~S~~ S:

  $\vdash S : (\sigma \to (\tau \to \rho)) \to ((\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \rho))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma \to (\tau \to \rho), \quad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash xz : \tau \to \rho} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash y : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash yz : \tau}}{\overbrace{x : \sigma \to (\tau \to \rho),\ y : \sigma \to \tau,\ z : \sigma}^{\Gamma} \vdash xz(yz) : \rho}}{\vdash \lambda x \lambda y \lambda z : (\sigma \to (\tau \to \rho)) \to ((\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \rho))}$$

Λήμμα:

- $\Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow FV(M) \subseteq \operatorname{dom}\Gamma$
- $\Gamma, x:\tau \vdash M : \sigma$ & $\underbrace{y \notin \operatorname{dom}\Gamma \cup \{x\}}_{\text{φρέσκια μεταβλητή}} \Rightarrow \Gamma, y:\tau \vdash M[x:=y] : \sigma$

Λήμμα – Αντιστροφή: $\Gamma \vdash M : \tau$ τότε

① $M \equiv x \Rightarrow \Gamma(x) = \tau$

② $M = PQ \Rightarrow$
$$\frac{\Gamma \vdash P : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash Q : \sigma \text{ (για κάποιο } \sigma)}{\Gamma \vdash PQ : \tau}$$

③ $M = \lambda x N$
$$\frac{\Gamma, x:\tau_1 \vdash N : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x N : \tau \equiv \tau_1 \to \tau_2} \quad (x \notin \operatorname{dom}\Gamma)$$

Λήμμα: ① $\Gamma \vdash M : \sigma$ & $\Gamma(x) = \Gamma'(x),\ \forall x \in FV(M) \Rightarrow \Gamma' \vdash M : \sigma$

② $\Gamma, x:\tau \vdash M : \sigma$ & $\Gamma \vdash N : \tau \Rightarrow \Gamma \vdash M[x:=N] : \sigma$

Θεώρημα (Αναγωγή υποκειμένου) $\Gamma \vdash M : \sigma$ & $M \twoheadrightarrow_\beta N \Rightarrow \Gamma \vdash N : \sigma$

Ορισμός $\sigma[p:=\tau]$, όπου σ, τ τύποι, p μεταβλητή τύπων.

Πρόταση (περιορισμένος πολυμορφισμός). $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma[p:=\tau] \vdash M : \sigma[p:=\tau]$

① **Type checking**: ισχύει το $\Gamma \vdash M:\tau$ δεδομένων των Γ, M και τ;

② **Typability**: Δοθέντος M, είναι το M τυποποιήσιμο (δηλ. υπάρχουν Γ και τ ώστε $\Gamma \vdash M:\tau$;).

③ **Type inhabitation**: Δοθέντος τ υπάρχει κλειστός M ώστε $\vdash M:\tau$;

~~Typability ανάγεται Type checking.~~ , $\triangle$ ισχύει

έστω ότι δίδεται M με $FV(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ρωτάμε αν

$$x_0:\rho \vdash K x_0 (\lambda x_1 \dots \lambda x_n . M):\rho$$

δηλαδή μπορούμε να έχουμε typability χρησιμοποιώντας το type checking.

Άρα και μη είναι το Type checking όχι πιο δυσκολότερο από το Typability

---

Θεώρημα: Typability & Type checking στον λ-λογισμό με απλούς τύπους είναι αποφασίσιμα προβλήματα σε πολυωνυμικό χρόνο.

ο αλγόριθμος για type checking δίνει και αλγόριθμο για typability.

Λάμδα-λογισμός à la Church

Κλασική προσέγγιση (ορθόδοξη)

- Τα μέλη του σ στοιχεία (αριθμήσιμου πλήθους) μεταβλητές των x^σ.
- Κάθε x^σ είναι όρος ($x^\sigma \in \sigma$)
- $M \in \sigma \to \tau$, $N \in \sigma \Rightarrow MN \in \tau$
- $M \in \tau$, $\Rightarrow \lambda x^\sigma . M \in \sigma \to \tau$

⊗ M^σ αντί του $M \in \sigma$

Σύγχρονη προσέγγιση

$$\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau$$

$$\frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash (\lambda x:\sigma\, M):\sigma\to\tau}$$

$$\frac{\Gamma : M:\sigma\to\tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash MN:\tau}$$

π.χ.

$$\vdash \lambda x^\sigma x : \sigma\to\sigma$$

$$\vdash \lambda x^\sigma \lambda y^\tau . x : \sigma\to(\tau\to\sigma)$$

$$\vdash \lambda x^{\sigma\to\tau\to\rho} \lambda y^{\sigma\to\tau} \lambda z^\sigma . xz(yz) : (\sigma\to\tau\to\rho)\to(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\rho$$

Subject reduction ισχύει

· Μέθοδοι τυποποίησης

Curry	Church-ενδιάμεσα	Church-ορθόδοξη
Η τυποποίηση και type inference γίνεται από compiler/interpreter. Γλώσσες: ML ή Haskell (type assignment system) [υπάρχουν πολλοί τύποι που αντιστοιχούν στον όρο].	Οι τύποι των δεσμευμένων μεταβλητών επισημαίνονται στον όρο, αλλά των ελεύθερων δίνονται στο περιβάλλον. Ο όρος γίνεται typed μόνο αν οι ελεύθερες μεταβλητές αποκτήσουν τύπους. Και οι τύποι είναι μοναδικοί	· Όλες οι πληροφορίες τύπων επισημαίνονται στον όρο. Κάθε μεταβλητή, δεσμευμένη ή ελεύθερη και κάθε υποόρος έχει μοναδικό τύπο. · Δεν υπάρχει θέμα typability. Γλώσσες όπως Pascal. (typed system).

Σχέσεις μεταξύ των συστημάτων

Erasing map $|\cdot|$, διαγράφει τους τύπους από το M.

$$\left\{\begin{array}{l} |x| = x \\ |MN| = |M||N| \\ |\lambda x{:}\sigma\, M| = \lambda x |M| \end{array}\right\}$$ Το Church γίνεται Curry.

- $\Gamma \vdash M:\sigma$ à la Church $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash |M|:\sigma$ à la Curry.
- αν $\underbrace{M \to_\beta N}_{\text{Church}} \Rightarrow |M| \to_\beta |N|$

lifting

$$\begin{tikzcd}
\text{Church} \arrow[r] & M' \arrow[r, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\shortparallel"] & N' \arrow[d, "\shortparallel"] & \text{μοναδικό } N' \arrow[l] \\
& {|M'|} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & {|N'|} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \\
\text{Curry.} \arrow[r] & M \arrow[r, "\beta"'] & N &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash M' : \sigma & \exists M' \\ \downarrow \shortparallel & \\ \Gamma \vdash M : \sigma & \\ \shortparallel & \\ |M'| & \end{array}$$

Ισχύουν

strong normalization for Curry $\Leftrightarrow$ strong normalization for Church

---

Αποδεικνύεται με reducibility.

1. simply typed terms are strongly normalizable
2. " " " satisfies the Church-Rosser property (or the uniqueness of normal form)

Να ~~...~~ κοιτάξω: Έστω M, N typed terms. Τότε αν M, N normal και $|M| =$

Επίσης 3.7 υπάρχει σχετικό και αποδείξεις για την συναρτησιακή-ορισιμότητα των extended polynomials

Ασκήσεις Σχετικές

3.14
3.15
3.16
3.17
3.18
3.19