Curry–Howard

~~[illegible]~~

Αποδείξεις — Όροι   Απ.bi τύποι

1. $\Gamma \vdash M:\varphi$, στο $\lambda_{\to}$ $\Rightarrow$ $rg(\Gamma) \vdash \varphi$ στο $IPC(\to)$

2. αν $\Delta \vdash \varphi$ στο $IPC(\to)$ $\Rightarrow$ $\exists\, M, \Gamma$ (με $rg(\Gamma)=\Delta$) τ.ω. $\Gamma \vdash M:\varphi$

Άρα

Μια συνεπαγωγική φόρμουλα φ είναι ιντουισιον. ταυτολογία $\Leftrightarrow$ φ είναι inhabited τύπος.

Εφαρμογή: • $\nexists$ συνδυαστής (κλειστός όρος) τύπου $((p\to q)\to p)\to p$.

• Η φόρμουλα $((((p\to q)\to p)\to p)\to q)\to q$ είναι ιντουισιονιστική ταυτολογία

↳ διότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον όρο

$$\lambda x.\ x\Big(\lambda y^{(p\to q)\to p}.\ y\big(\lambda z^{p}.\ x(\lambda u^{(p\to q)\to p}\, z)\big)\Big)$$

$x : (((p\to q)\to p)\to p)\to q$

• Το λογικό σύστημα $IPC(\to)$ είναι συνεπές, δηλ. υπάρχουν προτάσεις που δεν αποδεικνύονται

↳ Διότι έστω $\vdash p$ (p προτασιακή μεταβλ.). Τότε $\vdash M:p$ για κάποιο κλειστό M. Άρα και $\vdash M:p$ για κάποιο κλειστό κανονικό όρο M.

Άρα ~~[illegible]~~ $M = \lambda y_1 \ldots \lambda y_m.\ x M_1 \ldots M_n$, άρα από δημιουργία εφόσον ο τύπος p $m=0$. Άλλα τότε x ελεύθερο στο M ✳. [[illegible]

η-long-normal-form

① x^p (p type variable) is in long normal form

② If $M_1^{\tau_1}, \dots, M_n^{\tau_n}$ are long normal form & τότε $\left(x^{\tau_1 \to \dots \to \tau_n \to p} \cdot M_1 \dots M_n\right)^p$ is in long normal form

③ If M^σ is in long normal form then $(\lambda x^\tau M^\sigma)^{\tau \to \sigma}$ is in long normal form.

π.χ. $x^{\sigma_1 \to \sigma_2 \to \tau} M_1^{\sigma_1} M_2^{\sigma_2}$ όπου $M_1^{\sigma_1}$ και $M_2^{\sigma_2}$ are long normal form

για παράδειγμα αν $\sigma_1 \equiv \sigma_1' \to q_1$, $\sigma_2 \equiv \sigma_2' \to q_2$ και

$M_1^{\sigma_1} \equiv y^{\sigma_1' \to q_1}$, $M_2^{\sigma_2} \equiv z^{\sigma_2' \to q_2}$. Τότε $x^{\sigma_1 \to \sigma_2 \to \tau} (\lambda w_1^{\sigma_1'} . y w_1)(\lambda w_2^{\sigma_2'} . z w_2)$

είναι η-long normal form

Παρατήρηση: Κάθε τύπος σ είναι ή $\sigma \equiv p$ ή

$\sigma \equiv \tau_1 \to \tau_2 \to \dots \to \tau_n \to p$.

Τα long normal form έχουν τη μορφή: $\lambda x_1^{\tau_1} \dots \lambda x_n^{\tau_n} . y N_1 \dots N_k$ όπου $N_1, \dots, N_k$

long normal form και $y N_1 \dots N_k \in p$.

Κάθε κανονική μορφή M^σ (Church-style β-normal form) έχει έναν όρο L^σ

σε η-long-~~normal~~-form ώστε $L^\sigma \twoheadrightarrow_\eta M^\sigma$.

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύεται ότι αν $M \equiv x^\sigma$ το γεγονός ισχύει. Και αυτό

με επαγωγή στον τύπο σ.

i) Αν $\sigma = p$ άμεσο

ii) Αν $\sigma = \tau \to p$ τότε σχηματίζουμε το $\lambda y^\tau . x^{\tau \to p} \cdot y^\tau$ από ε.υ. για το

y^τ ∃ long nf form $N^\tau \to y^\tau$ άρα $\lambda y^\tau . x^{\tau \to p} \cdot N^\tau \twoheadrightarrow_\eta \lambda y^\tau . x^{\tau \to p} . y^\tau \to_\eta x^{\tau \to p}$.

όπως προηγούμενα

A type σ is inhabited $\iff$ σ is inhabited by a η-long normal form

---

Θέλω το χαρακτηρισμό για να λύσουμε το πρόβλημα του inhabitation is polynomial space (είναι complete for polynomial space (να κοιτάξω σελ. 79 σύνοψη))

Η σχέση μεταξύ αποδείξεων και όρων όπως παρουσιάζουμε δεν είναι ακριβώς ισομορφισμός. π.χ.

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p \vdash p \to p}}{p \vdash p \to p \to p}$$

← στην περίπτωση αυτή έχει $\Gamma, p \vdash p$ και το $p \in \Gamma$.
όπως πρόκειται $\Gamma \vdash p \to p$
και $\Gamma = \{p\}$ προκύπτει $p \vdash p \to p$

εδώ η αντιστοιχία με όρους
μπορεί να είναι:

$\lambda x^p \lambda y^p . x$ ή $\lambda x^p \lambda y^p . y$ (άρα όχι μοναδικότητα).

και αντίστροφα οι αντιστοιχίσεις

$$f : p \to p \to q,\ x : p \vdash f x x : q$$

$$f : p \to p \to q,\ x : p,\ y : p \vdash f x y : q$$

$$f : p \to p \to q,\ x : p,\ y : p,\ z : p \vdash f x x : q$$

αντιστοιχούν στην ίδια ~~..~~ λογική απόδειξη

$$\dfrac{\dfrac{p \to p \to q,\ p \vdash p \to p \to q \qquad p \to p \to q,\ p \vdash p}{p \to p \to q,\ p \vdash p \to q} \qquad p \to p \to q,\ p \vdash p}{p \to p \to q,\ p \vdash q}$$

Για να γίνει πραγματικός ισομορφισμός χρειάζεται η ειδική αναγωγή και ανάγεται σε δέλτα μορφή

Τότε ο ισομορφισμός γίνεται ακριβής (παντελώς υποθέτει) και η αναγωγή αντιστοιχεί στην απαλοιφή των παρακάμψεων (detours / cuts).

στην μέση του ισομορφισμού

Κάθε απόδειξη έχει κανονική μορφή

Αθροίσματα και Γινόμενα

$\wedge$ (in $\times$)

$\vee$ (ένα κατασκευάσιμο τύπου $\varphi\vee\psi$ αποτελείται από ένα κατασκευάσιμο τύπου φ ή τύπου ψ με flag που δείχνει τι έχει επιλεχθεί).

Επεκτεταμένος λ-λογισμός με απλούς τύπους (Church-style)

Τύποι: Μεταβλητές τύπων, $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$

~~Όροι: ...~~

Όροι: x^φ, $\lambda x^\varphi . M^\psi$, $M^{\varphi\to\psi} N^\varphi$, $\langle M^\varphi, N^\psi\rangle \in \varphi\wedge\psi$, $\pi_1(M^{\varphi\wedge\psi}) \in \varphi$

$\pi_2(M^{\varphi\wedge\psi}) \in \psi$

$in_1^{\varphi\vee\psi}(M^\varphi) \in \cancel{\varphi\vee\psi}\ \varphi\vee\psi$, $in_2^{\varphi\vee\psi}(M^\psi) \in \varphi\vee\psi$

$(\text{case } L^{\varphi\vee\psi} \text{ of } [x^\varphi] M^\rho \text{ or } [y^\psi] N^\rho) \in \rho$ (x^φ, y^ψ είναι δεσμευμένες από τους τελεστές $[x]$, $[y]$)

$\mathcal{E}_\psi(M^\perp) \in \psi$ (Αλλαγή τύπου των όρων με τύπο $\perp$).

Πρόσθετες αναγωγές!

$$\pi_1(\langle M_1, M_2\rangle) \to_\beta M_1$$

$$\pi_2(\langle M_1, M_2\rangle) \to_\beta M_2$$

$$\text{case } in_1^{\varphi\vee\psi}(N) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q \to_\beta P[x:=N]$$

$$\text{case } in_2^{\varphi\vee\psi}(N) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q \to_\beta Q[x:=N]$$

Curry-Howard

① $\Gamma \vdash M:\varphi \Rightarrow rg(\Gamma) \vdash \varphi$

② $\Delta \vdash \varphi \Rightarrow \exists M, \Gamma$ με $\Gamma \vdash M:\varphi$ και $rg(\Gamma) = \Delta$

Τι άλλο για λ-λογισμό ισχύει η ισχυρή κανονικοποίηση και η ιδιότητα Church-Rosser

---

σε λογική:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\vee\psi\end{matrix}\quad \begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ P\end{matrix}\quad \begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ P\end{matrix}}{P}$$

όρος ή απόδειξη

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ P\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ P\end{matrix}}{P} \Rightarrow \begin{matrix}\vdots\\ [\varphi]\\ \vdots\\ P\end{matrix}$$