Οι αποδείξεις ως συνδυαστές

Αποδείξεις τύπου Hilbert ~ συνδυαστές

(από την ύλη ο λ-λογισμός αλλά χωρίς δεσμευμένες μεταβλητές)

Απόδειξη: ακολουθία (αποδείξιμη): $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \equiv \varphi$ και MP $\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}$.

Αξιώματα: A1, A2

Μπορούμε να αποδείξουμε το $\varphi \to \varphi$.

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi)$ A2
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi$ A1
3. $(\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$ 1,2,MP (απόσπαση του 2 από το 1)
4. $\varphi \to \psi \to \varphi$ A1
5. $\varphi \to \varphi$ 3,4,MP (απόσπαση)

Η απόδειξη χωρίς σχόλια (annotation) γίνεται ambiguous.

Οπότε ορίζουμε το $\Gamma \vdash_H \varphi$

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

$$\Gamma \vdash \varphi \quad , \varphi \text{ λογικό αξίωμα}$$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2 \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \beta}$$

αποδείξεις στο δέντρο

Ισχύει

$\Gamma \vdash \varphi$ σε Hilbert style απόδειξη σύστημα $\iff \Gamma \vdash_H \varphi$

Θεώρημα απαγωγής $\quad \Gamma, \varphi \vdash_H \psi \iff \Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Επαγωγή στη απόδειξη του $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$.

Θεώρημα Πρόταση: $\quad \Gamma \vdash_N \varphi \iff \Gamma \vdash_H \varphi$

$\uparrow$

φυσική απαγωγή

άρα $\quad \Gamma \vdash_H \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

Μπορούμε να προσθέσουμε λογικά αξιώματα για τους άλλους συνδέσμους να διατηρήσουμε μόνο τον MP και να έχουμε πλήρες σύστημα

A3 $\quad \bot \to \varphi$

D1 $\quad \varphi \to \varphi \vee \psi$

D2 $\quad \psi \to \varphi \vee \psi$

D3 $\quad (\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to (\varphi \vee \psi \to \theta))$

C1 $\quad \varphi \wedge \psi \to \varphi$

C2 $\quad \varphi \wedge \psi \to \psi$

C3 $\quad (\theta \to \varphi) \to (\theta \to \psi) \to \theta \to \varphi \wedge \psi$

(Άρνηση $\neg\theta \equiv \theta \to \bot$)

Όταν στο επίπεδο της μεταθεωρίας επιχειρηματολογούμε με κατασκευαστικό τρόπο τότε κατασκευάζουμε αλγόριθμους π.χ. στην απόδειξη του θεωρήματος της απαγωγής η απόδειξη αναδεικνύει ένα τρόπο κατασκευής μιας τυπικής απόδειξης του $\varphi \to \psi$ από το Γ εφόσον μας δόθηκε με τυπική απόδειξη του ~~φ~~ ψ από το Γ, φ.

Συνδυαστές C (Combinator).

- x μεταβλητή $\Rightarrow x \in C$
- $K, S \in C$
- αν $G, H \in C$ τότε η εφαρμογή $(GH) \in C$

Αναγωγή $\to_w$, $\twoheadrightarrow_w$, $=_w$, w-normal form.

- $KFG \to_w F$
- $SFGH \to_w FH(GH)$

π.χ.

- $I = SKK$. $IF \twoheadrightarrow_w SKKF \to_w KF(KF) \to_w F$
- $SII(SII) \to I(SII)(I(SII)) \to SII(I(SII)) \to SII(SII)$
- $B = S(KS)K \Rightarrow BFGH \to S(KS)KFGH \to KSF(KF)GH$
  $\to S(KF)GH \to KFH(GH) \to F(GH)$
- $C = S(BBS)(KK)$. $CFGH \twoheadrightarrow FHG$, $\forall F, G, H$.

$FV(G) = \cdots$

$G[x := H] = \cdots$

Church-Rosser: $F \twoheadrightarrow F_1$ & $F \twoheadrightarrow F_2 \Rightarrow \exists$ $F_1 \twoheadrightarrow_w G$, $F_2 \twoheadrightarrow_w G$ για κάποιο G.

Συνδυαστική με τύπους (Curry):

$$\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau$$

$$\Gamma \vdash K : \sigma \to \tau \to \sigma$$

$$\Gamma \vdash S : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

Θεώρημα Κάθε τυποποιήσιμος όρος του C είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος

Curry–Howard

① Αν $\Gamma \vdash_C F : \varphi$ τότε $rg(\Gamma) \vdash_H \varphi$

② Αν $\Gamma \vdash_H \varphi$ τότε $\exists F \in C$ τ.ω. $\Delta \vdash_C F : \varphi$, για κάποιο Δ με $rg(\Delta) = \Gamma$.

$\exists$ και η εκδοχή à la Church. $K_{\sigma,\tau}$

$S_{\sigma,\tau,\rho}$

Combinators vs λ-terms

Πρόταση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

① $\exists$ όρος $M \in \Lambda$ ώστε $\Gamma \vdash_\Lambda M : \tau$

② —"— $H \in C$ " $\Gamma \vdash_C H : \tau$

Άρα ισχύουν και παρατηρήσεις: Όχι μόνο οι ίδιοι τύποι είναι inhabited αλλά υπάρχει και σχέση μεταξύ των inhabitants.

Μετάφραση-αντιστοίχιση: $(\ )_\Lambda : C \to \Lambda$

Ορισμός:

$$(x)_\Lambda = x$$

$$(K)_\Lambda = \lambda x \lambda y . x$$

$$(S)_\Lambda = \lambda x \lambda y \lambda z . x z (y z)$$

$$(FG)_\Lambda = (F)_\Lambda (G)_\Lambda$$

Πρόταση: $F \to_w G \Rightarrow (F)_\Lambda \twoheadrightarrow_\beta^+ (G)_\Lambda$

Πόρισμα: (i) $F \twoheadrightarrow_w G \Rightarrow F \twoheadrightarrow_\beta G$

(ii) $F =_w G \Rightarrow (F)_\Lambda =_\beta (G)_\Lambda$

Η αντίστροφη απεικόνιση: $\Lambda \to C$.

Πρέπει να ορίσουμε την παράσταση (simulation), χωρίς δεσμευμένες μεταβλητές

Ορισμός αν $F \in C$, x μεταβλητή ορίζουμε τον $\lambda^* x F \in C$ ως εξής

$$\begin{cases} \lambda^* x\, x = I \\ \lambda^* x F = KF, \text{ όταν } x \notin FV(F) \\ \lambda^* x\, FG = S(\lambda^* x F)(\lambda^* x G) \text{ διαφορετικά.} \end{cases}$$

Πρόταση: 1. $(\lambda^* x F)G \twoheadrightarrow_w F(x:=G)$

2. $(\lambda^* x F)_\Lambda \twoheadrightarrow_\beta \lambda x (F)_\Lambda$

Πόρισμα: $\forall x, F$, $\exists H$ τ.ω. για κάθε G

$$HG \twoheadrightarrow_w F[x:=G]$$

"συνδυαστική πληρότητα"

Δοθέντος $F(x)$ τότε η F ορίζει μια συνάρτηση-απεικόνιση $f: C \to C$ ώστε $f(G) = F[x:=G]$. Η συνδυαστική πληρότητα λέει ότι κάθε τέτοια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνδυαστή H ώστε $HG = f(G)$, $\forall G \in C$.

ορισμός $\cdot\ (\ )_C : \Lambda \to C$

$$\begin{cases} (x)_C = x \\ (MN)_C = (M)_C (N)_C \\ (\lambda x M)_C = \lambda^{*} x\, (M)_C \end{cases}$$

Πρόταση: $\forall M \in \Lambda: \quad ((M)_C)_\Lambda \twoheadrightarrow_\beta M$

- Άρα $((M)_C)_\Lambda =_\beta M$

- Άρα η απεικόνιση $C/_{=_w} \to \Lambda/_{=_\beta}$ είναι επί. (επιμορφισμός)

Πόρισμα: Κάθε κλειστός (λ-όρος) όρος M είναι β-ισοδύναμος με όρο που δημιουργείται μόνο από τα K και S με εφαρμογή.

Θ. τύπων διατήρησης

$\Gamma \vdash_C F:\tau \Rightarrow \Gamma \vdash_\Lambda (F)_\Lambda : \tau$	• $(\ )_\Lambda$ διατηρεί τους τύπους [άρα SN for combinators].
$\Gamma \vdash_\Lambda M:\tau \Rightarrow \Gamma \vdash_C (M)_C : \tau$	• $(\ )_C$ " " " (όπως βγαίνει από το παρακάτω λήμμα). Λήμμα: $\Gamma, x:\rho \vdash_C F:\tau \Rightarrow \Gamma \vdash_C \lambda^{*} x F : \rho \to \tau$

Είναι η απεικόνιση $(\ )_C : \Lambda \to C$ το ίδιο καλή με την $(\ )_\Lambda$;

όχι!!

(1) Η σύνθεση $((\,)_\lambda)_c$ δεν είναι ταυτότητα:

$$\text{π.χ.}\quad ((K)_\lambda)_c = S(KK)I \neq_w K$$

(2) Η ισότητα $M =_\beta N$ δεν συνεπάγεται γενικά ότι $(M)_c =_w (N)_c$

π.χ. $\lambda x\, KIx \twoheadrightarrow_\beta \lambda x\, I$ αλλά $(\lambda x\, KIx)_c = S(K(S(KK)I))I =_w S(K(KI))I$

$$\neq_w KI = (\lambda x\, I)_c$$

Πρόβλημα: η ασθενής αρχή της έκτασης

$$\frac{M = N}{\lambda x M = \lambda x M}$$

δεν ισχύει για το λ^* και $=_w$. Όπως

$$\lambda^* x\, KIx = S(K(KI))I \neq_w KI = \lambda^* x\, I$$

$$\text{ενώ}\quad KIx \to_w I$$

Να σχολιάσετε την περίπτωση των εκτατικών εκδοχών των Λ και C

σελ. 117 Sørensen

---

and substructural logics

Επειδή μπορεί να είναι $M =_\beta N$ αλλά όχι $(M)_c =_w (N)_c$

ενώ $M =_w N$ συνεπάγεται $(M)_\lambda =_\beta (N)_\lambda$

μπορεί η διαφορά αν η G έχει πάρα πολλές κανονικές μορφές.

δηλαδή, η αναγωγή συμπεριφέρεται πιο γρήγορα.

Θα θέλαμε να μπορούσαμε να αγνοήσουμε «μη ουσιαστικές» διαφορές ανάμεσα των όρων π.χ. SGH ή KG.

Η αντιστοιχία μεταξύ C και Λ είναι πολύ πιο καλή εάν πάρουμε την επεκτατική ισότητα ανάμεσα των όρων (extensional)

$=_{ext}$

- $G =_w H \Rightarrow G =_{ext} H$
- $Gx =_{ext} Hx \quad \forall x$ μεταβλητή $\Rightarrow G =_{ext} H$
- $G =_{ext} G' \Rightarrow CH =_{ext} G'H$ & $HG =_{ext} HG'$

Ισχύουν οι

(i) $G =_{ext} H$ και $(G)_\lambda =_{\beta\eta} (H)_\lambda$ είναι ισοδύναμες

(ii) $M =_{\beta\eta} N$ και $(M)_C =_{ext} (N)_C$ είναι ισοδύναμες

(iii) $((G)_\lambda)_C =_{ext} G \quad , \forall G \in C$

(iv) $((M)_C)_\lambda =_{\beta\eta} M \quad \forall M \in \Lambda$.