Για το $ISWIM_v$. Μπορώ να αλλάξω τον τρόπο υπολογισμού σε call-by-value. επιτρέπει το όρισμα μιας συνάρτησης να υπολογίζεται πριν την εκτέλεση του μέρους της συνάρτησης. Το context τώρα ορίζεται

$$E ::= \Box \mid NE \mid EV$$

Τότε η λειτουργική σημασιολογία για την εφαρμογή δεν αλλάζει. Πράγμα που δεν ισχύει αν υπάρχουν οι control operators. Διότι στον όρο MN η σειρά θα επηρεάζει από το ποιο θα υπολογίσουμε πρώτα π.χ. η εφαρμογή του M μπορεί να "πηδά" στο context E_1 και η ~~εφ~~ εφαρμογή του N να "πηδάει" στο E_2.

Call-by-~~value~~ name

Context: $E ::= \Box \mid EN$

με β-rule $\quad E[(\lambda x.M)N] \to_n E[M[N/x]]$

operational semantics: $eval_n$

1. $eval_n(V) = V$
2. $eval_n(MN) = eval_n(Q[N/x])$ αν $eval_n(M) = \lambda x.Q$

Λήμμα: $eval_n(M) = V \iff M \twoheadrightarrow_{\beta_n} V$

Για την IS_n προσθέτουμε τον operator C με

$$E[C(M)] \to_c M\lambda z.A(E[z])$$, όπου E ένα call-by-name context

~~Προσπαθήσω~~ Εξιδανικευμένη Scheme με τύπους IS_t

Τύποι: $T ::= P \mid T \to T$

$\uparrow$ ατομικοί τύποι

Διαλέγουμε την τυποποίηση à la Church

Curry–Howard: το x^σ αντιστοιχεί σε υπόθεση σ

οπότε (όπως πριν)

$$\left.\left.\begin{array}{c}[\sigma]^1 \\ \Sigma \\ \tau \\ \hline \sigma\to\tau \end{array}\right\} M^\tau[x^\sigma] \right\} (\lambda x^\sigma . M^\tau)^{\sigma\to\tau}.$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε λογικά συνεπή τυποποίηση για τον C.

Κοιτάζουμε τον $\to_C$ κανόνα.

$$\underbrace{E[\overbrace{C(M)}^{\tau}]}_{\sigma} \longrightarrow_C M\,\lambda z.\mathcal{A}(E[z]) \qquad (*)$$

Έστω E είναι τύπου σ και η οπή στο E "αναμένει" όρο τύπου τ.

Φαίνεται εύλογο να αποδώσουμε στο $\lambda z.\mathcal{A}(E[z])$ τον τύπο $\tau\to\sigma$ διότι για κάθε τιμή V τύπου τ

$$\underbrace{(\lambda z.\mathcal{A}(E[z]))}_{\tau\to\sigma}\underbrace{V}_{\tau} \longrightarrow_v \underbrace{E[V]}_{\sigma}$$

Άρα κοιτάζοντας το (*), το M πρέπει να είναι του τύπου $(\tau\to\sigma)\to\sigma$

Άρα, για το C(M). Αν το M έχει τύπο $(\tau\to\sigma)\to\sigma$ το C(M) πρέπει να έχει τ.

Έπεται από αυτό ότι αν N είναι κλειστός όρος τύπου σ τότε

το $\mathcal{A}(N) = C(\lambda d. N)$ μπορεί να πάρει οποιοδήποτε τύπο τ.

$$\lambda d^{(\tau\to\sigma)}. N^{\sigma} \in (\tau\to\sigma)\to\sigma \Rightarrow \text{οπότε } C(\lambda d. N) \in \tau.$$

Άρα αν θέλουμε να διατηρείται ο Curry-Howard πρέπει το σ να αντιστοιχεί σε φόρμουλα που δεν έχει απόδειξη (διότι διαφορετικά κάθε φόρμουλα θα είχε απόδειξη). Υποθέτουμε ότι υπάρχει ο τύπος $\perp$ (κενός τύπος) οπότε καταλήγουμε στο εξής (για το $C(M)$).

Αν ο M έχει τύπο $\neg\neg\tau \equiv (\tau\to\perp)\to\perp$ τότε ο $C(M)$ έχει τύπο τ.

Δηλ. $M \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \neg\neg\tau\end{array}}{\tau} \right\} C(M)$ $\quad \perp_c$-κανόνας.

~~Πρόβλημα: $M^{\neg\neg\tau}$ $\lambda z^{\tau\to\perp}. \mathcal{A}(E[z])$~~ | και το $\mathcal{A}(M)$ αντιστοιχεί στο $\mathcal{A}(M)^{\in\tau} \left\{ \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \perp\end{array}}{\tau} \right\} M^{\perp}$

Δηλ. το $\mathcal{A}$ εφαρμόζεται σε όρο τύπου $\perp$.

Πρόβλημα: Αφού για $\mathcal{A}(E[z])$ το $E[z]$ πρέπει να είναι τύπου $\perp$ και επειδή δεν υπάρχουν κλειστοί όροι αυτού του τύπου ο κανόνας

$E[C(M)]$ είναι άχρηστος!

Ο Griffin δίνει μια λύση, αλλά μια καλύτερη λύση δίνεται από τον Parigot με το $\lambda\mu$-λογισμό.

$\boxed{A}$

$\boxed{A\ 80}$

Λύση Griffin

Αντί της αποτίμησης μιας έκφρασης M^{τ} με $\to_v$ κανόνες, η έκφραση $C(\lambda k^{\neg\tau}. kM)$ αποτιμάται με τους κανόνες του $\to_v$ εφαρμοζόμενους μόνο <u>μέσα</u> στην έκφραση $C(\lambda k.....)$. Αυτό έχει νόημα και πρέπει τον τύπο διότι το σώμα της λ-έκφρασης έχει τύπο $\bot$.

Άρα έστω ότι έχουμε όρο M^{τ} και θέλουμε να τον υπολογίσουμε.

Αντί αυτού υπολογίζουμε τον $C(\lambda k^{\neg\tau}.\underbrace{\ldots\ldots}_{kM \in \bot})$ όπως τον υπολογίζουμε τον εφαρμόζουμε στον όρο kM με τύπο $\bot$.

$\Downarrow$

έχουμε τις ακόλουθες αναγωγές $\quad \to_t$

$$C(\lambda k. E[(\lambda x. M)V]) \to_{t\beta_v} C(\lambda k. E[M[V/x]])$$

$$C(\lambda k. E[C(M)]) \to_{tC} C(\lambda k. M\lambda z. \mathcal{A}(E[z]))$$

$$C(\lambda k. kV) \to_{C_e} V \quad (k \text{ όχι ελεύθερο στον } V)$$

Ορισμός: η έκφραση M^{τ} αποτιμάται στον Q εάν

$$C^{\tau}(\lambda k^{\neg\tau}. kM) \twoheadrightarrow_t Q$$

Ορισμοί των τύπων $\wedge$ και $\vee$ (που δεν ορίζονται στην περίπτωση της ιντουισιονιστικής λογικής

Ορισμοί στην περίπτωση του call-by-name

$\wedge$

$$\alpha\wedge\beta \overset{op.}{=} \neg(\alpha\to\neg\beta)$$

π.χ. ο κανόνας $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \alpha & \beta\end{matrix}}{\alpha\wedge\beta}\,(\wedge I)$ ορίζεται ως $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{[\alpha\to\neg\beta]}^{1} \quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha\end{matrix}}{\neg\beta} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\bot}\,1}{\neg(\alpha\to\neg\beta)}$

Έστω M^α αντιστοιχεί στο $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha\end{matrix}$ και N^β αντιστοιχεί στο $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}$

τότε ο όρος στο IS_t είναι $\boxed{\langle M,N\rangle \overset{op}{=} \lambda f^{\alpha\to\neg\beta}.fMN \in \alpha\wedge\beta.}$

ο κανόνας $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha_1\wedge\alpha_2\end{matrix}}{\alpha_1}\,(\wedge E_1)$ παράγεται από $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \neg(\alpha_1\to\neg\alpha_2)\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{[\alpha_1]}^{1}\ \cancel{[\neg\alpha_1]}^{2}}{\bot}}{\neg\alpha_2}\,1 \to \alpha_1\to\neg\alpha_2}{\bot}\,2}{\neg\neg\alpha_1}}{\alpha_1}$

Εάν λοιπόν ο όρος $M^{\alpha\wedge\beta}$ αντιστοιχεί στο $\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\wedge\beta\end{matrix}$

τότε ο όρος $\pi_1(M) \overset{op}{=} C(\lambda j^{\neg\alpha}.M\,\lambda x_1^{\alpha}\lambda x_2^{\beta}.\,j x_1)$

Τσεκάρισμα του $E[\pi_1(\langle M_1,M_2\rangle)] \to_{\pi_1} E[M_1]$

έστω $Q=\lambda z.\mathcal{A}(E[z])$,

$E[\pi_1(\langle M_1,M_2\rangle)] \equiv E[C(\lambda j^{\neg\alpha}.\langle M_1,M_2\rangle\,\lambda x_1\lambda x_2.\,jx_1)] \to_C \{\lambda j^{\neg\alpha}\dots\dots\}Q$

$\to \langle M_1,M_2\rangle(\lambda x_1\lambda x_2.\,Qx_1) \equiv (\lambda f.\,fM_1M_2)(\lambda x_1\lambda x_2.\,Qx_1)$

$\to (\lambda x_1\lambda x_2.\,Qx_1)M_1M_2 \to QM_1 \to \mathcal{A}(E[M_1]) \to E[M_1].$

το ίδιο και για π_2

A82

(V)

$$\alpha \vee \beta \overset{\text{ορ}}{=} \neg\alpha \to \beta .$$

ο κανόνας $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha\vee\beta}$ ή $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\end{matrix}}{\neg\alpha\to\beta}$ $\quad$ $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{[\neg\alpha]}^1 \quad \begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\end{matrix}}{\bot}}{\beta}}{\neg\alpha\to\beta}\,1$

άρα αν M^α αντιστοιχεί στο $\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\end{matrix}$ τότε

$$in_1(M) \overset{\text{ορ}}{=} \lambda\kappa^{\neg\alpha}.\,\mathcal{A}^\beta(\kappa M)$$

. Για το $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \beta\end{matrix}}{\neg\alpha\to\beta} \rightsquigarrow \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \beta\end{matrix}}{\neg\alpha\to\beta}\,1$ (¬α οιονεί υπόθεση)

άρα $in_2(M) \overset{\text{ορ}}{=} \lambda\kappa^{\neg\alpha}.\,M$.

Για το $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \alpha\vee\beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\alpha]\\ \Sigma_1\\ \delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\beta]\\ \Sigma_2\\ \delta\end{matrix}}{\delta}$. Μπορούμε στην κλασική λογική να το προσομοιώσουμε με το

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}M\\ \vdots\\ \neg\alpha\to\beta\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left.\begin{matrix}\cancel{[\alpha]}^1\\ \Sigma_1\\ \delta\end{matrix}\right\} M_1}{\alpha\to\delta}\,1 \quad \cancel{[\alpha]}^2}{\delta} \quad \cancel{[\neg\delta]}^4}{\bot}}{\neg\alpha}\,2}{\beta} \quad \dfrac{\left.\begin{matrix}\cancel{[\beta]}^3\\ \Sigma_2\\ \vdots\\ \delta\end{matrix}\right\} M_2}{\beta\to\delta}\,3}{\dfrac{\dfrac{\delta}{\neg\neg\delta}\,4}{\delta}}$$

με
$F_1 = \lambda x_1^\alpha.\,M_1$
$F_2 = \lambda x_2^\beta\,M_2$

Οπότε $\operatorname{case}(M, F_1, F_2) \overset{\text{ορ}}{=} \mathcal{C}\left(\lambda j^{\neg\delta}.\, j\left(F_2\left(M\, \lambda x^\alpha.\, j\left(F_1 x^\alpha\right)\right)\right)\right)$

Τότε $E[\operatorname{case}(in_1(N), F_1, F_2)] \xrightarrow[\text{case}]{} E[F_1 N]$, ομοίως και για in_2