Περιγραφική Πολυπλοκότητα

Λογική: Βασικοί ορισμοί, παραδείγματα κλπ

Ανδρέας Αβουκάτος, 7115142200001

ΑΛΜΑ

Παρασκευή, 03/03/2023

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$$

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$$

Πχ: $\tau_g = \left\langle E^2, s, t \right\rangle, \tau_s = \left\langle \leq^2, S^1 \right\rangle$

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$

Πχ: $\tau_g = \left\langle E^2, s, t \right\rangle, \tau_s = \left\langle \leq^2, S^1 \right\rangle$

Structure

Για δεδ. voc τ:

$\mathcal{A} = \left\langle |A|, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_s^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_t^{\mathcal{A}} \right\rangle,$

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$$

Πχ: $\tau_g = \left\langle E^2, s, t \right\rangle, \tau_s = \left\langle \leq^2, S^1 \right\rangle$

Structure

Για δεδ. voc τ:

$\mathcal{A} = \left\langle |A|, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_s^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_t^{\mathcal{A}} \right\rangle, |\mathcal{A}| \neq \emptyset$

Για κάθε σχεσ. συμβ: $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq |A|^{a_i}$

Για κάθε συμβ. σταθ: $c_j \in |\mathcal{A}|$

Για κάθε συμβ. συν: $f_k^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{a_k} \to |\mathcal{A}|$

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$$

Πχ: $\tau_g = \left\langle E^2, s, t \right\rangle, \tau_s = \left\langle \leq^2, S^1 \right\rangle$

Structure

Για δεδ. voc τ:

$\mathcal{A} = \left\langle |A|, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_s^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_t^{\mathcal{A}} \right\rangle, |\mathcal{A}| \neq \emptyset$

Για κάθε σχεσ. συμβ: $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq |A|^{a_i}$

Για κάθε συμβ. σταθ: $c_j \in |\mathcal{A}|$

Για κάθε συμβ. συν: $f_k^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{a_k} \to |\mathcal{A}|$

Πχ: $G = \left\langle |G| = \{0, 1, 2, 3\}, E^G = \{(0, 1), (1, 2)\}, s^{\mathcal{A}} = 0, t^{\mathcal{A}} = 3 \right\rangle,$

Βασικοί ορισμοί

Vocabulary

$\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s, f_1^{r_1}, \ldots f_t^{r_t} \right\rangle$

Πχ: $\tau_g = \left\langle E^2, s, t \right\rangle, \tau_s = \left\langle \leq^2, S^1 \right\rangle$

Structure

Για δεδ. voc τ:

$\mathcal{A} = \left\langle |A|, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_s^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_t^{\mathcal{A}} \right\rangle, |\mathcal{A}| \neq \emptyset$

Για κάθε σχεσ. συμβ: $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq |A|^{a_i}$

Για κάθε συμβ. σταθ: $c_j \in |\mathcal{A}|$

Για κάθε συμβ. συν: $f_k^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{a_k} \to |\mathcal{A}|$

Πχ: $G = \left\langle |G| = \{0, 1, 2, 3\}, E^G = \{(0, 1), (1, 2)\}, s^{\mathcal{A}} = 0, t^{\mathcal{A}} = 3 \right\rangle$,

$\mathcal{A}_w = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \leq, \{1, 3\} \rangle$

Μερικά σχόλια

- Εφεξής σχεσιακά vocabulary, όχι συμβ. συνάρτησης

Μερικά σχόλια

- Εφεξής σχεσιακά vocabulary, όχι συμβ. συνάρτησης
- Πληθάριθμος universe $||\mathcal{A}|| = |\,|\mathcal{A}|\,|$

Μερικά σχόλια

- Εφεξής σχεσιακά vocabulary, όχι συμβ. συνάρτησης
- Πληθάριθμος universe $\|\mathcal{A}\| = |\,|\mathcal{A}|\,|$
- Μόνο πεπερασμένες δομές,
  $\mathrm{STRUC}[\tau] = \{\, \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ πεπερ. δομή στο voc. $\tau\}$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi \text{ wff στο } \tau \}$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- $1)$ $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) VAR $= \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
- 3) $f(t_1, \ldots, t_n)$, για $t_1, \ldots, t_n$ terms

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
- 3) $f(t_1, \ldots, t_n)$, για $t_1, \ldots, t_n$ terms

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{\, \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
- 3) $f(t_1, \ldots, t_n)$, για $t_1, \ldots, t_n$ terms

Well formed formulas:

- 1) t_1, t_2 terms, τότε: $t_1 = t_2$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
- 3) $f(t_1, \ldots, t_n)$, για $t_1, \ldots, t_n$ terms

Well formed formulas:

- 1) t_1, t_2 terms, τότε: $t_1 = t_2$
- 2) R σχέση, $t_1, \ldots, t_k$ terms, τότε: $R(t_1, \ldots, t_k)$

Formulas

$\mathcal{L}(\cdot)$

Για δεδ. voc. τ: $\mathcal{L}(\tau) = \{ \varphi \mid \varphi$ wff στο $\tau\}$

Terms:

- 1) $\mathrm{VAR} = \{x, y, z, \ldots\}$
- 2) Σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
- 3) $f(t_1, \ldots, t_n)$, για $t_1, \ldots, t_n$ terms

Well formed formulas:

- 1) t_1, t_2 terms, τότε: $t_1 = t_2$
- 2) R σχέση, $t_1, \ldots, t_k$ terms, τότε: $R(t_1, \ldots, t_k)$
- 3) φ, ψ formulas, τότε: $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\exists x)\varphi$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x) x + 1 = y] \wedge x < y$

$\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$

$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$

$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$\psi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$
$$\psi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \varphi$$
$$(\exists x.\alpha)\varphi \equiv (\exists x)(\alpha \wedge \varphi)$$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$

$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$\psi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

$(\exists x.\alpha)\varphi \equiv (\exists x)(\alpha \wedge \varphi)$

$(\forall x.\alpha)\varphi \equiv (\forall x)(\alpha \rightarrow \varphi)$

Formulas - cont.

Ορισμός formula

Χρησιμοποιούμε το συμβ $\equiv$ μεταξύ φ και wff f για να δηλώσουμε συντακτική ισοδυναμία των φ, f: $\varphi \equiv [(\exists x)x + 1 = y] \wedge x < y$

$\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$

$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$\psi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

$(\exists x.\alpha)\varphi \equiv (\exists x)(\alpha \wedge \varphi)$

$(\forall x.\alpha)\varphi \equiv (\forall x)(\alpha \rightarrow \varphi)$

Χαρακτηρισμός μτβλ. σε formula

Για εμφάνιση μεταβλ. u και formula φ, η εμφ. της u είναι bound αν βρίσκεται εντός scope ποσοδείκτη: $(\exists v)(\cdots$ εδώ: $v \cdots)$, αλλιώς είναι free.

Χαρακτηρισμός μτβλ. σε formula

Για εμφάνιση μεταβλ. u και formula φ, η εμφ. της u είναι bound αν βρίσκεται εντός scope ποσοδείκτη: $(\exists v)(\cdots$ εδώ: $v \cdots)$, αλλιώς είναι free. Μια μτβλ u είναι free στον φ, αν η u εμφανίζεται free.

Χαρακτηρισμός μτβλ. σε formula

Για εμφάνιση μεταβλ. u και formula φ, η εμφ. της u είναι bound αν βρίσκεται εντός scope ποσοδείκτη: $(\exists v)(\cdots$ εδώ: $v \cdots)$, αλλιώς είναι free. Μια μτβλ u είναι free στον φ, αν η u εμφανίζεται free. Formula χωρίς ελ. μτβλς, λέγεται sentence / πρόταση

Χαρακτηρισμός μτβλ. σε formula

Για εμφάνιση μεταβλ. u και formula φ, η εμφ. της u είναι bound αν βρίσκεται εντός scope ποσοδείκτη: $(\exists v)(\cdots$ εδώ: $v \cdots)$, αλλιώς είναι free. Μια μτβλ u είναι free στον φ, αν η u εμφανίζεται free. Formula χωρίς ελ. μτβλς, λέγεται sentence / πρόταση

Αν σε **formula** φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής:
$\varphi \equiv \forall y (x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής:
$\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής: $\varphi \equiv \forall y (x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$.

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής:
$\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$. Ορίζουμε επαγωγικά πότε μια formula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ είναι αληθής στο (A, i):

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής: $\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$. Ορίζουμε επαγωγικά πότε μια formula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ είναι αληθής στο (A, i):

- $(\mathcal{A}, i) \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow i(t_1) = i(t_2)$

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής:
$\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$. Ορίζουμε επαγωγικά πότε μια formula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ είναι αληθής στο (A, i):

- $(\mathcal{A}, i) \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow i(t_1) = i(t_2)$
- $(\mathcal{A}, i) \models R(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \langle i(t_1), \ldots, i(t_n) \rangle \in R^{\mathcal{A}}$

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής: $\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$. Ορίζουμε επαγωγικά πότε μια formula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ είναι αληθής στο (A, i):

- $(\mathcal{A}, i) \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow i(t_1) = i(t_2)$
- $(\mathcal{A}, i) \models R(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \langle i(t_1), \ldots, i(t_n) \rangle \in R^{\mathcal{A}}$
- $(\mathcal{A}, i) \models \neg\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, i) \not\models \varphi$

Αν σε formula φ υπάρχουν ελευ. μτβλς, δεν αποφαίνεται αληθής:
$\varphi \equiv \forall y(x < y)$ σε δομή Θ. Αριθμών.
Χρησιμοποιούμε interpretation $i : V \to |A|$ για κατάλληλο πεπερ. $V \subseteq \mathrm{VAR}$. Επεκτείνουμε $i(c) = c^{\mathcal{A}}$, και επαγωγικά:
$i(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(i(t_1), \ldots, i(t_n))$

Τι εστί αλήθεια

Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, i interpretation με κατάλληλο π.ο. στο $\mathcal{A}$. Ορίζουμε επαγωγικά πότε μια formula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ είναι αληθής στο (A, i):

- $(\mathcal{A}, i) \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow i(t_1) = i(t_2)$
- $(\mathcal{A}, i) \models R(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \langle i(t_1), \ldots, i(t_n)\rangle \in R^{\mathcal{A}}$
- $(\mathcal{A}, i) \models \neg\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, i) \not\models \varphi$
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, i) \models \varphi$ και $(\mathcal{A}, i) \models \psi$

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

Τελικά, $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \emptyset) \models \varphi$

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

Τελικά, $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \emptyset) \models \varphi$
Τι σημαίνουν:

- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \vee \psi$;

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

Τελικά, $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \emptyset) \models \varphi$

Τι σημαίνουν:

- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \vee \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \rightarrow \psi$;

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

Τελικά, $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \emptyset) \models \varphi$

Τι σημαίνουν:

- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \vee \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \rightarrow \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \leftrightarrow \psi$;

- $(\mathcal{A}, i) \models (\exists x)\varphi \Leftrightarrow$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$: $(\mathcal{A}, i, a/x) \models \varphi$

όπου interpretation $(i, a/x) = \begin{cases} i(y), y \neq x \\ a, \quad y = x \end{cases}$

Τελικά, $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \emptyset) \models \varphi$

Τι σημαίνουν:

- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \vee \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \rightarrow \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models \varphi \leftrightarrow \psi$;
- $(\mathcal{A}, i) \models (\forall x)\varphi$

Παράδειγμα

$$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle,$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1, 2, 3\}, E^G = \{(1, 2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y, t) \lor E(t, y))$

$G \models \varphi \Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y, t) \lor E(t, y))$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1, 2, 3\}, E^G = \{(1, 2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y, t) \vee E(t, y))$

$$G \models \varphi \Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y, t) \vee E(t, y))$$
$$\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y, y) \vee E(t, y))$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$G \models \varphi \Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$$
$$\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y)$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi &\Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t,y)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1, 2, 3\}, E^G = \{(1, 2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y, t) \vee E(t, y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi &\Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y, t) \vee E(t, y)) \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y, y) \vee E(t, y)) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y, t) \vee E(t, y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y, t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t, y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \langle (a/y)(y), (a/y)(t) \rangle \notin E \text{ και } \langle (a/y)(t), (a/y)(y) \rangle \notin E
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi &\Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \langle (a/y)(y), (a/y)(t) \rangle \notin E \text{ και } \langle (a/y)(t), (a/y)(y) \rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \left\langle a, t^G \right\rangle \notin E \text{ και } \left\langle t^G, a \right\rangle \notin E
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv$ $(\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi \Leftrightarrow\ & G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y)) \\
\Leftrightarrow\ & \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t,y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in |G| : \langle (a/y)(y), (a/y)(t) \rangle \notin E \text{ και } \langle (a/y)(t), (a/y)(y) \rangle \notin E \\
\Leftrightarrow\ & \forall a \in |G| : \left\langle a, t^G \right\rangle \notin E \text{ και } \left\langle t^G, a \right\rangle \notin E \\
\Leftrightarrow\ & (\forall a \in |G|) \langle a, 3 \rangle \notin E \text{ και } (\forall a \in |G|) \langle 3, a \rangle \notin E
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi &\Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \langle (a/y)(y), (a/y)(t) \rangle \notin E \text{ και } \langle (a/y)(t), (a/y)(y) \rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \left\langle a, t^G \right\rangle \notin E \text{ και } \left\langle t^G, a \right\rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow (\forall a \in |G|) \langle a, 3 \rangle \notin E \text{ και } (\forall a \in |G|) \langle 3, a \rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow \text{true} \wedge \text{true} \Leftrightarrow \text{true}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$G = \left\langle V^G = \{1,2,3\}, E^G = \{(1,2)\}, t^G = 3 \right\rangle$, $\varphi \equiv (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y))$

$$
\begin{aligned}
G \models \varphi &\Leftrightarrow G \models (\forall y)\neg(E(y,t) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } a \in |G| : (G, a/y) \models \neg(E(y,y) \vee E(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \vee E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : (G, a/y) \not\models E(y,t) \text{ και } (G, a/y) \not\models E(t,y) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \langle (a/y)(y), (a/y)(t) \rangle \notin E \text{ και } \langle (a/y)(t), (a/y)(y) \rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow \forall a \in |G| : \left\langle a, t^G \right\rangle \notin E \text{ και } \left\langle t^G, a \right\rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow (\forall a \in |G|) \langle a, 3 \rangle \notin E \text{ και } (\forall a \in |G|) \langle 3, a \rangle \notin E \\
&\Leftrightarrow \text{true} \wedge \text{true} \Leftrightarrow \text{true}
\end{aligned}
$$

$\varphi_{\mu\kappa} \equiv (\exists x)(\forall y)\neg(E(y,x) \vee E(x,y))$

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil log n \rceil$-bit words

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil log n \rceil$-bit words
- Χρήσιμες αριθμητικές σχέσεις:

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil log n \rceil$-bit words
- Χρήσιμες αριθμητικές σχέσεις:
  - $\mathrm{PLUS}(i, j, k) \Leftrightarrow i + j = k$

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil logn \rceil$-bit words
- Χρήσιμες αριθμητικές σχέσεις:
  - $\mathrm{PLUS}(i, j, k) \Leftrightarrow i + j = k$
  - $\mathrm{TIMES}(i, j, k) \leftrightarrow i * j = k$

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil log n \rceil$-bit words
- Χρήσιμες αριθμητικές σχέσεις:
  - $\mathrm{PLUS}(i, j, k) \Leftrightarrow i + j = k$
  - $\mathrm{TIMES}(i, j, k) \leftrightarrow i * j = k$
  - $\mathrm{BIT}(i, j) \Leftrightarrow$ ο αρ i_2 έχει 1 στο j-οστό ψηφίο. Σε αυτόν τον ορισμό, το μηδενικό ψηφίο είναι το δεξί (που αντιστ. στις μονάδες)

- Αν $\leq \in \tau$ και $\mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau]$, τότε $\leq^{\mathcal{A}}$ ολική διάταξη στο σύμπαν $|\mathcal{A}|$
- Σταθερές $0, 1, \max \in \tau$ ερμηνεύονται ως το ελ, το 2ο ελ και το μεγ. στχ στο σύμπαν
- Ταυτοποιούμε τα στοιχεία με τον αριθμό εμφάνισής τους στην αύξουσα σειρά βάσει $\leq$: $a_i \mapsto i$. Όλες οι δομές έχουν για στοιχεία φυσικούς αριθμούς
- Σε υπολογιστή αυτοί αναπαρίστανται ως $\lceil logn \rceil$-bit words
- Χρήσιμες αριθμητικές σχέσεις:
  - $\text{PLUS}(i, j, k) \Leftrightarrow i + j = k$
  - $\text{TIMES}(i, j, k) \leftrightarrow i * j = k$
  - $\text{BIT}(i, j) \Leftrightarrow$ ο αρ i_2 έχει 1 στο j-οστό ψηφίο. Σε αυτόν τον ορισμό, το μηδενικό ψηφίο είναι το δεξί (που αντιστ. στις μονάδες)
- $\text{SUC}(x, y) \equiv (x < y) \wedge (\forall z)\neg(x < z \wedge z < y)$

- Πάντα υπάρχουν $\leq$, PLUS(), TIMES(), BIT(), SUC(), 0, 1, max σε όλα τα **voc**

- Πάντα υπάρχουν $\leq, \mathrm{PLUS}(), \mathrm{TIMES}(), \mathrm{BIT}(), \mathrm{SUC}(), 0, 1, \max$ σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(**wo** $\leq$) σύνολο **wff** φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα

- Πάντα υπάρχουν $\leq, \mathrm{PLUS}(), \mathrm{TIMES}(), \mathrm{BIT}(), \mathrm{SUC}(), 0, 1, \max$ σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(wo $\leq$) σύνολο wff φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(wo BIT) σύνολο wff φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq, \mathrm{SUC}, 0, 1, \max$

- Πάντα υπάρχουν $\leq$, PLUS(), TIMES(), BIT(), SUC(), 0, 1, max σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(**wo** $\leq$) σύνολο **wff** φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(**wo** BIT) σύνολο **wff** φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq$, SUC, 0, 1, max
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1\mathcal{A}$

- Πάντα υπάρχουν $\leq, \mathrm{PLUS}(), \mathrm{TIMES}(), \mathrm{BIT}(), \mathrm{SUC}(), 0, 1, \max$ σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(wo $\leq$) σύνολο **wff** φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(wo BIT) σύνολο **wff** φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq, \mathrm{SUC}, 0, 1, \max$
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1\mathcal{A}$

- Πάντα υπάρχουν $\leq, \mathrm{PLUS}(), \mathrm{TIMES}(), \mathrm{BIT}(), \mathrm{SUC}(), 0, 1, \max$ σε όλα τα voc
- $\mathcal{L}(\text{wo} \leq)$ σύνολο wff φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}(\text{wo}\,\mathrm{BIT})$ σύνολο wff φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq, \mathrm{SUC}, 0, 1, \max$
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1^{\mathcal{A}}$

Boolean variable

Είναι μτβ περιορισμένη στις τιμές 0, 1. Ταυτοποιούμε το 0 ως ψευδές, το 1 ως αληθές. Συνηθισμένοι χαρακτήρες: b, c, d, e

- Πάντα υπάρχουν $\leq$, PLUS(), TIMES(), BIT(), SUC(), 0, 1, max σε όλα τα voc
- $\mathcal{L}$(wo $\leq$) σύνολο wff φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(wo BIT) σύνολο wff φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq$, SUC, 0, 1, max
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1\mathcal{A}$

Boolean variable

Είναι μτβ περιορισμένη στις τιμές 0, 1. Ταυτοποιούμε το 0 ως ψευδές, το 1 ως αληθές. Συνηθισμένοι χαρακτήρες: b, c, d, e

- $bool(b) \equiv b \leq 1$

- Πάντα υπάρχουν $\leq$, PLUS(), TIMES(), BIT(), SUC(), 0, 1, max σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(wo $\leq$) σύνολο wff φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(wo BIT) σύνολο wff φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq$, SUC, 0, 1, max
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1^{\mathcal{A}}$

Boolean variable

Είναι μτβ περιορισμένη στις τιμές 0, 1. Ταυτοποιούμε το 0 ως ψευδές, το 1 ως αληθές. Συνηθισμένοι χαρακτήρες: b, c, d, e

- $bool(b) \equiv b \leq 1$
- $(\exists b) \equiv (\exists b.bool(b))$

- Πάντα υπάρχουν $\leq$, PLUS(), TIMES(), BIT(), SUC(), 0, 1, max σε όλα τα **voc**
- $\mathcal{L}$(wo $\leq$) σύνολο wff φ χωρίς κανένα από τα παραπάνω σύμβολα
- $\mathcal{L}$(wo BIT) σύνολο wff φ με διάταξη χωρίς αριθμητική, δηλ διαθέσιμα: $\leq$, SUC, 0, 1, max
- Όλες οι δομές έχουν τουλ δύο στχ, άρα $0^{\mathcal{A}} \neq 1^{\mathcal{A}}$

Boolean variable

Είναι μτβ περιορισμένη στις τιμές 0, 1. Ταυτοποιούμε το 0 ως ψευδές, το 1 ως αληθές. Συνηθισμένοι χαρακτήρες: b, c, d, e

- $bool(b) \equiv b \leq 1$
- $(\exists b) \equiv (\exists b.bool(b))$
- $(\forall b) \equiv (\forall b.bool(b))$

Θεωρ.

Για voc. τ με διάταξη:

- Αν $\mathrm{BIT} \in \tau$ τότε $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS}$ first-order definable

Θεωρ.

Για voc. τ με διάταξη:

- Αν $\mathrm{BIT} \in \tau$ τότε $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS}$ first-order definable
- Αν $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS} \in \tau$ τότε BIT first-order definable

Θεωρ.

Για voc. τ με διάταξη:

- Αν $\mathrm{BIT} \in \tau$ τότε $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS}$ first-order definable
- Αν $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS} \in \tau$ τότε BIT first-order definable

Θεωρ.

Για voc. τ με διάταξη:

- Αν $\mathrm{BIT} \in \tau$ τότε $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS}$ first-order definable
- Αν $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS} \in \tau$ τότε BIT first-order definable

Πότε μια σχέση R είναι f.o. definable σε μια δομή $\mathcal{A}$;

Θεωρ.

Για voc. τ με διάταξη:

- Αν $\mathrm{BIT} \in \tau$ τότε $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS}$ first-order definable
- Αν $\mathrm{TIMES}, \mathrm{PLUS} \in \tau$ τότε BIT first-order definable

Πότε μια σχέση R είναι f.o. definable σε μια δομή $\mathcal{A}$;

- Υπάρχει wff φ_R τ.ω. $R = \{\, a \in |\mathcal{A}| \mid \mathcal{A} \models \varphi(a)\}$

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε voc τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε **voc** τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

- f 1-1 και επί

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε **voc** τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

- f 1-1 και επί
- Για κάθε συμβ σχέσης R:
  $\langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(t_1), \ldots, f(t_k) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε **voc** τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

- f 1-1 και επί
- Για κάθε συμβ σχέσης R:
  $\langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(t_1), \ldots, f(t_k) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$
- Για κάθε συμβ σταθεράς c: $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε voc τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

- f 1-1 και επί
- Για κάθε συμβ σχέσης R:
  $\langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(t_1), \ldots, f(t_k) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$
- Για κάθε συμβ σταθεράς c: $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Ορισμός ισομ. δομών δίχως διάταξη

Για δομές $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σε voc τ, λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με τη $\mathcal{B}$, συμβ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει απεικ. $f : |A| \to |B|$ και:

- f 1-1 και επί
- Για κάθε συμβ σχέσης R:
  $\langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle f(t_1), \ldots, f(t_k) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$
- Για κάθε συμβ σταθεράς c: $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Βασική προτ.

Αν $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ και πρόταση $\varphi \in \mathcal{L}(\tau \setminus \{\leq\})$ τότε $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$

Query

Query είναι συνάρτηση $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$ πολυων. φραγμένη. Υπάρχει πολυων. $p : ||I(\mathcal{A})|| \leq p(||A||)$

Query

Query είναι συνάρτηση $I : \text{STRUC}[\sigma] \to \text{STRUC}[\tau]$ πολυων. φραγμένη. Υπάρχει πολυων. $p : ||I(\mathcal{A})|| \leq p(||A||)$
Boolean query: $I_b : \text{STRUC}[\sigma] \to \{0, 1\}$ - μπορεί να τις σκεφτεί κανείς ως υποσύνολο των $\text{STRUC}[\sigma]$ με $I(\mathcal{A}) = 1$

Query

Query είναι συνάρτηση $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$ πολυων. φραγμένη. Υπάρχει πολυων. $p : \|I(\mathcal{A})\| \leq p(\|A\|)$
Boolean query: $I_b : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \{0, 1\}$ - μπορεί να τις σκεφτεί κανείς ως υποσύνολο των $\mathrm{STRUC}[\sigma]$ με $I(\mathcal{A}) = 1$
I order-independant $\Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{STRUC}[\sigma] : \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow I(\mathcal{A}) \cong I(\mathcal{B})$

Query

Query είναι συνάρτηση $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$ πολυων. φραγμένη. Υπάρχει πολυων. $p : ||I(\mathcal{A})|| \leq p(||A||)$
Boolean query: $I_b : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \{0, 1\}$ - μπορεί να τις σκεφτεί κανείς ως υποσύνολο των $\mathrm{STRUC}[\sigma]$ με $I(\mathcal{A}) = 1$
I order-independant $\Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{STRUC}[\sigma] : \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow I(\mathcal{A}) \cong I(\mathcal{B})$

Πχ: Για προτάσεις $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$, ορίζουμε I_φ στο $\mathrm{STRUC}[\tau]$ με $I_\varphi(\mathcal{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$

Query

Query είναι συνάρτηση $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$ πολυων. φραγμένη. Υπάρχει πολυων. $p : ||I(\mathcal{A})|| \leq p(||A||)$
Boolean query: $I_b : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \{0, 1\}$ - μπορεί να τις σκεφτεί κανείς ως υποσύνολο των $\mathrm{STRUC}[\sigma]$ με $I(\mathcal{A}) = 1$
I order-independant $\Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{STRUC}[\sigma] : \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow I(\mathcal{A}) \cong I(\mathcal{B})$

Πχ: Για προτάσεις $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$, ορίζουμε I_φ στο $\mathrm{STRUC}[\tau]$ με $I_\varphi(\mathcal{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$
Για γραφήματα $G \in \mathrm{STRUC}[\tau_g]$ θεωρούμε query ISOLATED VERTEX, IV πάνω στο $\mathrm{STRUC}[\tau_g]$ με $\mathrm{STRUC}[\tau_g] IV(G) = 1 \Leftrightarrow$ υπάρχει μεμ. κόμβος στο G. Καθώς «$IV \equiv \varphi_{\mu\kappa}$», γεννιέται η ιδέα του first order query

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \rightarrow \mathrm{STRUC}[\tau]$.

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$. Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$:

$$I(\mathcal{A}) = \left\langle |I(\mathcal{A})|, R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})} \right\rangle$$

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$. Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$:

$$I(\mathcal{A}) = \left\langle |I(\mathcal{A})|, R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})} \right\rangle$$

Το I δίνεται από $r + s + 1$ πρωτοτάξιους τύπους $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$. Οι τύποι με τη σειρά τους ορίζουν τα $I(\mathcal{A}), R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})}$:

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$. Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$:

$$I(\mathcal{A}) = \left\langle |I(\mathcal{A})|, R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})} \right\rangle$$

Το I δίνεται από $r + s + 1$ πρωτοτάξιους τύπους $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$. Οι τύποι με τη σειρά τους ορίζουν τα $I(\mathcal{A}), R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})}$:

- $|I(\mathcal{A})| = \left\{ \left\langle b^1, \ldots, b^k \right\rangle \in |A|^k \mid \mathcal{A} \models \varphi_0(b^1, \ldots, b^k) \right\}$

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$. Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$:

$$I(\mathcal{A}) = \left\langle |I(\mathcal{A})|, R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})} \right\rangle$$

Το I δίνεται από $r + s + 1$ πρωτοτάξιους τύπους $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$. Οι τύποι με τη σειρά τους ορίζουν τα $I(\mathcal{A}), R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})}$:

- $|I(\mathcal{A})| = \left\{ \left\langle b^1, \ldots, b^k \right\rangle \in |A|^k \mid \mathcal{A} \models \varphi_0(b^1, \ldots, b^k) \right\}$
- $R_i^{I(\mathcal{A})} = \left\{ \left(\left\langle b_1^1, \ldots, b_1^k \right\rangle, \ldots, \left\langle b_{a_i}^1, \ldots, b_{a_i}^k \right\rangle \right) \in |I(\mathcal{A})| \mid \mathcal{A} \models \varphi_i(b_1^1, \ldots, b_{a_i}^k) \right\}$

k-ary first order query

Για vocs σ, τ με $\tau = \left\langle R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}, c_1, \ldots, c_s \right\rangle$ και k φυσικός αριθμός, query $I : \mathrm{STRUC}[\sigma] \to \mathrm{STRUC}[\tau]$. Για $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\tau]$:

$$I(\mathcal{A}) = \left\langle |I(\mathcal{A})|, R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})} \right\rangle$$

Το I δίνεται από $r + s + 1$ πρωτοτάξιους τύπους $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$. Οι τύποι με τη σειρά τους ορίζουν τα $I(\mathcal{A}), R_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, R_r^{I(\mathcal{A})}, c_1^{I(\mathcal{A})}, \ldots, c_s^{I(\mathcal{A})}$:

- $|I(\mathcal{A})| = \left\{ \left\langle b^1, \ldots, b^k \right\rangle \in |A|^k \mid \mathcal{A} \models \varphi_0(b^1, \ldots, b^k) \right\}$
- $R_i^{I(\mathcal{A})} = \left\{ \left(\left\langle b_1^1, \ldots, b_1^k \right\rangle, \ldots, \left\langle b_{a_i}^1, \ldots, b_{a_i}^k \right\rangle \right) \in |I(\mathcal{A})| \mid \mathcal{A} \models \varphi_i(b_1^1, \ldots, b_{a_i}^k) \right\}$
- $c_j^{I(\mathcal{A})} =$ το μον. $\left\langle b^1, \ldots, b^k \right\rangle \in |I(\mathcal{A})| : \mathcal{A} \models \psi_j(b^1, \ldots, b^k)$

k-ary first order query - cont.

Αν τα ψ_j τ.ω. $\mathcal{A} \in \mathrm{STRUC}[\sigma]$:
$\left|\left\{\left\langle b^1, \ldots, b^k \right\rangle \in |\mathcal{A}|^k \mid (\mathcal{A}, b^1/x_j^1, \ldots, b^k/x_j^k) \models \varphi_0 \wedge \psi_j\right\}\right| = 1$ τότε γράφουμε

$$I = \lambda_{x_1^1, \ldots, x_a^k} \langle \varphi_0, \ldots, \psi_s \rangle$$

και λέμε το I ότι είναι k-query, $(a = \max a_i \mid 1 \leq i \leq r)$

First Order Queries - FO - $\mathcal{Q}$(FO)

Ένα First Order Query είναι είτε boolean ή k-ary query.

$$\mathrm{FO} := \{\text{F.O. binary queries}\}$$

$$\mathcal{Q}(\mathrm{FO}) = \{\text{F.O. queries}\}$$

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού
- P: διμελές, «ο/η x είναι γονέας του/της y»

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού
- P: διμελές, «ο/η x είναι γονέας του/της y»
- S: διμελές, «ο/η x είναι σύζυγος του/της y»

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού
- P: διμελές, «ο/η x είναι γονέας του/της y»
- S: διμελές, «ο/η x είναι σύζυγος του/της y»

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού
- P: διμελές, «ο/η x είναι γονέας του/της y»
- S: διμελές, «ο/η x είναι σύζυγος του/της y»

Ορίζουμε unary $I_{SA} = \lambda_{xy} \langle \text{true}, \varphi_{sibl}, \varphi_{aunt} \rangle$ στις δομές GDB του voc $\left\langle \text{SIBL}^2, \text{AUNT}^2 \right\rangle$:

$$\varphi_{sibl}(x, y) \equiv (\exists f m)(x \neq y \wedge f \neq m \wedge P(f, x) \wedge P(f, y) \wedge P(m, x) \wedge P(m, y))$$

Παράδειγμα

Genealogical DB

$\mathcal{A} = \langle U, F, P, S \rangle$

- U: σύμπαν, ανθρώποι
- F: μονομελές, άνθρωποι γένους θηλυκού
- P: διμελές, «ο/η x είναι γονέας του/της y»
- S: διμελές, «ο/η x είναι σύζυγος του/της y»

Ορίζουμε unary $I_{SA} = \lambda_{xy} \langle \text{true}, \varphi_{sibl}, \varphi_{aunt} \rangle$ στις δομές GDB του voc $\left\langle \text{SIBL}^2, \text{AUNT}^2 \right\rangle$:

$$\varphi_{sibl}(x, y) \equiv (\exists f m)(x \neq y \wedge f \neq m \wedge P(f, x) \wedge P(f, y) \wedge P(m, x) \wedge P(m, y))$$

$$\varphi_{aunt}(x, y) \equiv (\exists p s)(P(p, y) \wedge \varphi_{sibl}(p, s) \wedge (s = x \vee S(x, s))) \wedge F(x)$$