Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2023-2024

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής – Δ. Φωτάκης – Θ. Λιανέας – Ο. Πλευράκης

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 10/7/2024

Άσκηση 1. Σχεδιάστε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Weighted Set Cover. Αποδείξτε την ορθότητά του και τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει. Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου.
Υπόδειξη: γενικεύστε την ιδέα του degree-weighted αλγορίθμου για το Weighted Vertex Cover. *Εναλλακτικά, προσαρμόστε κατάλληλα τον αλγόριθμο της 3ης άσκησης της 3ης σειράς του μαθήματος "Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα (2023-24)":* `https://helios.ntua.gr/pluginfile.php/1928/course/section/12406/ask03_w2023.pdf`

Άσκηση 2. Τι λόγο προσέγγισης επιτυγχάνει ο Greedy αλγόριθμος για το Maximum Coverage όταν:

(α) τα στοιχεία έχουν βάρος και επιδιώκουμε τη μεγιστοποίηση του βάρους των καλυπτόμενων στοιχείων (με k σύνολα);

(β) Τα σύνολα έχουν βάρη και μας δίνεται (αντί για πλήθος συνόλων k) ένα budget B, και επιτρέπεται να επιλέξουμε σύνολα με συνολικό βάρος το πολύ B; Θεωρήστε ότι τα στοιχεία σε αυτή την περίπτωση έχουν όλα το ίδιο βάρος.

Άσκηση 3. Μελετήστε την προσεγγισιμότητα του προβλήματος Dominating Set: δοθέντος γράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ελάχιστης πληθικότητας σύνολο κορυφών $D \subseteq V$, ώστε κάθε κορυφή του $V \setminus D$ να έχει μία τουλάχιστον γειτονική κορυφή στο D. Δώστε άνω και κάτω φράγματα για τον λόγο προσέγγισης συγκρίνοντας με το πρόβλημα Set Cover.

Άσκηση 4. (α) Συμπληρώστε την απόδειξη που θα βρείτε στις διαφάνειες για τον λόγο προσέγγισης $5/3$ για το πρόβλημα Metric $\text{TSP}_{(s,t)-path}$. Εξηγήστε τον ρόλο του όρου $c_{s,t}$ στην ανάλυση καθενός από τους δύο επιμέρους αλγορίθμους.

(β) Δώστε tight example για τους επιμέρους αλγορίθμους, καθώς και για τον συνολικό αλγόριθμο.

Άσκηση 5. Θεωρήστε τον εξής αλγόριθμο για το πρόβλημα Knapsack: τα στοιχεία ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά $p(i)/w(i)$ και εισάγονται με αυτή τη σειρά στο σακίδιο. Όποια στοιχεία δεν χωρούν απορρίπτονται.

(α) Δείξτε ότι ο λόγος προσέγγισης αυτού του αλγορίθμου δεν φράσσεται από καμμία σταθερά.

(β) Δείξτε ότι με την εξής απλή τροποποίηση ο αλγόριθμος γίνεται $(1/2)$-προσεγγιστικός: επιλέξτε την καλύτερη λύση μεταξύ της παραπάνω διαδικασίας και του να πάρει κανείς μόνο το στοιχείο με τη μεγαλύτερη αξία.

(γ) Γενικεύστε την ιδέα του (β) ώστε να πάρετε ένα PTAS για το πρόβλημα.

Άσκηση 6. Διατυπώστε έναν FPT αλγόριθμο για το πρόβλημα q-coloring (αν ένας γράφος μπορεί να χρωματιστεί με q χρώματα, q σταθερά, ανεξάρτητη της εισόδου) με παράμετρο το treewidth k. Θεωρήστε ότι σας δίνεται και η αντίστοιχη tree decomposition [1, Άσκηση **7.18.c**].

Άσκηση 7 (Online Projected Gradient Descent)**.** Θεωρούμε την online εκδοχή του Projected Gradient Descent. Έστω κυρτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο αλγόριθμος OPGD εξελίσσεται σε χρονικό ορίζοντα μήκους $T \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιεί βήμα $\eta > 0$.

Θεωρούμε μια αυθαίρετα επιλεγμένη αρχική λύση $\boldsymbol{x}_1 \in S$. Για κάθε χρονική στιγμή $t = 1, \ldots, T$, ο αλγόριθμος OPGD:

1. Λαμβάνει ως είσοδο κυρτή συνάρτηση $f_t : S \to \mathbb{R}_+$, την οποία εφαρμόζει στην τρέχουσα λύση $\boldsymbol{x}_t$. Το κόστος του αλγόριθμου για το βήμα t είναι $f_t(\boldsymbol{x}_t)$.

2. Θέτει $\boldsymbol{y}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta \nabla f_t(\boldsymbol{x}_t)$

3. Ενημερώνει την τρέχουσα λύση σε $\boldsymbol{x}_{t+1} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{t+1}\|$, προβάλλοντας το $\boldsymbol{y}_{t+1}$ στο S με βάση την Ευκλείδεια απόσταση.

'Εστω $B = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ η διάμετρος του S και $G = \max_t \max_{\boldsymbol{x}\in S} \|\nabla f_t(\boldsymbol{x})\|$ ένα άνω φράγμα στο Ευκλείδειο μέτρο του gradient των συναρτήσεων f_t .

1. Να δείξετε ότι για βήμα $\eta = \frac{B}{G\sqrt{T}}$,

$$\sum_{t=1}^{T} f_t(\boldsymbol{x}_t) - \min_{\boldsymbol{x}\in S} \sum_{t=1}^{T} f_t(\boldsymbol{x}) \leq BG\sqrt{T}$$

   Η ποσότητα στο αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι γνωστή ως *regret* του αλγόριθμου (ως προς τη βέλτιστη λύση για το άθροισμα των συναρτήσεων f_t που υπολογίζεται εκ των υστέρων).

2. Να επιλέξετε χρονικά μεταβαλλόμενο βήμα η_t (πλέον το βήμα εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t, όχι από το μήκος του χρονικού ορίζοντα T) ώστε να έχουμε regret $O(BG\sqrt{T})$, χωρίς εκ των προτέρων γνώση του μήκους T του χρονικού ορίζοντα.

3. Αν οι συναρτήσεις f_t είναι α-ισχυρά κυρτές, να επιλέξετε βήμα η_t (ως συνάρτηση των α και t) ώστε να έχουμε regret $O(G^2 \ln(T)/\alpha)$.

Άσκηση 8 (Linear Integer Programming Formulations, 12 μον.)**.** Να διατυπώσετε τα παρακάτω προβλήματα βελτιστοποίησης ως προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού:

(α) Δίνονται m παράλληλες υπολογιστικές μηχανές και n υπολογιστικές διεργασίες. Κάθε διεργασία i έχει χρόνο εκτέλεσης $p_{ij} \in \mathbb{N}^*$ στην μηχανή j. Ζητείται να αναθέσουμε κάθε διεργασία σε μία υπολογιστική μηχανή ώστε ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης των εργασιών στη μηχανή που έχει δεχθεί το μεγαλύτερο υπολογιστικό φορτίο να ελαχιστοποιηθεί.

(β) Δίνονται ένα σύνολο C με τις θέσεις n πελατών και ένα σύνολο F με m πιθανές θέσεις καταστημάτων. Δίνονται ακόμη το κόστος $f_j \in \mathbb{N}$ για να ανοίξουμε κατάστημα σε κάθε θέση $j \in F$ και οι αποστάσεις $d : C \times F \to \mathbb{N}$ για κάθε ζευγάρι θέσεων $(i, j) \in C \times F$. Ζητείται ένα υποσύνολο $F' \subseteq F$ θέσεων όπου θα ανοίξουμε καταστήματα, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος για να ανοίξουμε καταστήματα στις θέσεις του F' και τη συνολική απόσταση κάθε πελάτη $i \in C$ από το κοντινότερό του ανοικτό κατάστημα.

Άσκηση 9 (Partial Vertex Cover)**.** Δίνονται γράφημα $G(V, E)$ και παράμετρος $\beta > 0$. Ζητείται υποσύνολο κορυφών $C \subseteq V$ που ελαχιστοποιεί το $\beta|C|+|U(C)|$, όπου $U(C) = \{\{u, v\} \in E : u, v \notin C\}$ είναι οι ακμές που δεν καλύπτονται από το C.

(α) Να διατυπώσετε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου (γραμμικού) προγραμματισμού, να δώσετε το αντίστοιχο LP relaxation, και να βρείτε το αντίστοιχο δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα. Να διατυπώσετε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από το δυϊκό πρόγραμμα σε φυσική γλώσσα.

Άσκηση 10. Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.3**] και την [2, Άσκηση **5.6**].

Αναφορές

[1] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Lukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, and Saket Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2016.

[2] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.