Μοντέλα και Αποδείξεις Ασφάλειας στην Κρυπτογραφία - Ανταλλαγή Κλειδιού Diffie Hellman

Παναγιώτης Γροντάς - Άρης Παγουρτζής

21/11/2023

ΕΜΠ - Κρυπτογραφία

Ερωτήματα

- Τι σημαίνει ότι ένα σύστημα είναι *ασφαλές*;
- Πώς αποδεικνύεται;

Μειονέκτημα

Ασφαλές: προστασία $\forall$ επίθεση

Μη-Ασφαλές: $\exists$ μία επιτυχής επίθεση

Σύγχρονη Κρυπτογραφία: Αυστηροί Ορισμοί και Αποδείξεις

Ορισμοί

Κρυπτοσύστημα

- $\text{CS} = (\mathcal{M}, \mathcal{K}, \mathcal{C}, \text{KGen}, \text{Enc}, \text{Dec})$
- $\mathcal{M}$: Σύνολο Μηνυμάτων
- $\mathcal{K}$: Σύνολο Κλειδιών
- $\mathcal{C}$: Σύνολο Κρυπτοκειμένων

Δημιουργία κλειδιού

- $\mathrm{KGen}(1^\lambda) = (key_{\mathrm{Enc}}, key_{\mathrm{Dec}}) \in K^2$
  - Πιθανοτικός Αλγόριθμος
  - Το κλειδί συνήθως επιλέγεται *ομοιόμορφα* από το K
  - λ : Παράμετρος ασφάλειας - πλήθος bits του κλειδιού
    - Συμβολισμός στο μοναδιαίο (λ '1'): Χαρακτηρισμός ως προς το μέγεθος της εισόδου, όχι ως προς το μέγεθος της αναπαράστασής της
    - Πχ. για ασφάλεια 80 bits θέλουμε το κλειδί να έχει 80 δυαδικά ψηφία και όχι $log_2 80 = 7$ ή $log_{10} 80 = 2$
    - Σημασία για χρόνο παραγωγής κλειδιών, εκτέλεσης κρυπτογράφησης, υπολογιστικής προσπάθειας - πιθανότητας επιτυχίας 'σπασίματος'

Κρυπτογράφηση

Κρυπτογράφηση

$\text{Enc}(key_{enc}, m) = c \in C$

- Ντετερμινιστικός Αλγόριθμος: Κάθε μήνυμα αντιστοιχεί σε ένα κρυπτοκείμενο
- Πιθανοτικός Αλγόριθμος: Κάθε μήνυμα αντιστοιχεί σε ένα σύνολο πιθανών κρυπτοκειμένων

Αποκρυπτογράφηση

$\text{Dec}(key_{dec}, c) = m$

Ορθότητα

$\text{Dec}(key_{dec}, \text{Enc}(key_{enc}, m)) = m, \forall m \in M$

Παρατηρήσεις

- Συμμετρικό Κρυπτοσύστημα $key_{enc} = key_{dec}$
- Ασύμμετρο Κρυπτοσύστημα $key_{enc} \neq key_{dec}$
  - Κρυπτογραφία Δημοσίου Κλειδιού
  - Το key_{enc} μπορεί να δημοσιοποιηθεί για την εύκολη ανταλλαγή μηνυμάτων
  - Το key_{dec} είναι μυστικό

Ο αντίπαλος $\mathcal{A}$

- Στόχος: Να παραβιάσει την ασφάλεια.
- Δηλαδή, για το κρυπτοκείμενο c:
  - Να μάθει το κλειδί k;
    - Θέλουμε να προστατεύσουμε το μήνυμα
    - Τετριμμένα $\mathsf{Enc}(k, m) = m$ είναι αδύνατο να σπάσει, αλλά τι ασφάλεια παρέχει;
  - Να μάθει ολόκληρο το αρχικό μήνυμα m;
    - Αν μάθει το 90%;
  - Να μάθει κάποια συνάρτηση του m;
    - Ναι αλλά ποια;
- Συμπέρασμα: Χρειάζονται ακριβείς ορισμοί
  - Για τις δυνατότητες και τα μέσα του αντιπάλου.
  - Για τον τρόπο αλληλεπίδρασής του με το σύστημα.
  - Για το κριτήριο επιτυχίας - 'σπάσιμο'.

Είδη επιθέσεων

Επίθεση Μόνο Κρυπτοκειμένου - Ciphertext Only Attack (COA)

- Παθητικός Αντίπαλος (Eve)
- Πολύ εύκολη: Χρειάζεται απλά πρόσβαση στο κανάλι επικοινωνίας

Επίθεση Γνωστού Μηνύματος - Known Plaintext Attack (KPA)

- Παθητικός Αντίπαλος
- Γνωρίζει *ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένων*
- Τετριμμένο σενάριο για ασύμμετρα, γιατί:
  - Ο $\mathcal{A}$ έχει το δημόσιο κλειδί
  - Μπορεί να κατασκευάσει μόνος του όσα ζεύγη θέλει
- Ρεαλιστικό σενάριο και για συμμετρικά, γιατί:
  - Ακόμα και τα κρυπτογραφημένα πρωτόκολλα περιέχουν μη απόρρητα μηνύματα (handshakes, ack)
  - Ιστορικό παράδειγμα: Κρυπτοκείμενα πρόγνωσης καιρού στη μηχανή Enigma
  - Κρυπτογραφημένα μηνύματα γίνονται κάποια στιγμή διαθέσιμα

Επίθεση Επιλεγμένου Μηνύματος - Chosen Plaintext Attack (CPA)

- *Ενεργός* Αντίπαλος (Mallorie)
- Γνωρίζει ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένων
- *Μπορεί να ζητήσει την κρυπτογράφηση μηνυμάτων της επιλογής του (Μαντείο Κρυπτογράφησης)*
- Ιστορικό Παράδειγμα: Σπάσιμο κρυπτοσυστήματος JN-25b στη ναυμαχία του Midway (Ιούνιος 1942)
  - Υποψία ότι Enc(”Midway”) = ”AF”
  - Αποστολή Πλαστών Μηνυμάτων για επισκευή του συστήματος υδροδότησης του ’Midway’
  - Συλλογή Επικοινωνιών Με Κρυπτοκείμενα ’AF’
  - Συσχέτιση με παλιότερες επικοινωνίες

Επίθεση Επιλεγμένου Κρυπτοκειμένου Chosen Ciphertext Attack (CCA)

- Ενεργός Αντίπαλος
- Γνωρίζει ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένων
- Μπορεί να ζητήσει την κρυπτογράφηση μηνυμάτων της επιλογής του (Μαντείο Κρυπτογράφησης)
- Μπορεί να *επιτύχει* την αποκρυπτογράφηση μηνυμάτων της επιλογής του (Μαντείο Αποκρυπτογράφησης)
- Διαίσθηση: Ο αντίπαλος μπορεί να βγάλει *έμμεσα* συμπεράσματα από αντιδράσεις σε κρυπτογραφημένα μηνύματα
  - Απόρριψη κρυπτογραφημένων 'σκουπιδιών' από το πρωτόκολλο (Bleichenbacher RSA PKCS1 attack)
  - Ενέργεια στον πραγματικό κόσμο (πχ. αγορά μετοχών)

Μοντέλα Ασφάλειας

Οι κανόνες του Kerchoffs (1883)

Οι πρώτες προσπάθειες ορισμού ασφάλειας κρυπτοσυστημάτων και προστασίας

Αρχή 2
Ο αλγόριθμος(από)κρυπτογράφησης δεν πρέπει να είναι μυστικός. Πρέπει να μπορεί να πέσει στα χέρια του $\mathcal{A}$ χωρίς να δημιουργήσει κανένα πρόβλημα. Αντίθετα το κλειδί μόνο πρέπει να είναι μυστικό.

Λόγοι:

- Το κλειδί διανέμεται πιο εύκολα από τους αλγόριθμους (μικρότερο μέγεθος, απλούστερη δομή)
- Το κλειδί είναι πιο εύκολο να αλλαχθεί αν διαρρεύσει
- Πιο πρακτική χρήση για περισσότερους από έναν συμμετέχοντες
- Ανοικτό κρυπτοσύστημα: Εύκολη μελέτη

Οι κανόνες του Kerchoffs (1883) - (2)

Παρατηρήσεις:

Αν και έχουν παράδοση ακόμα και σήμερα δεν εφαρμόζονται πλήρως

- (Μεγάλες) εταιρίες δημιουργούν και χρησιμοποιούν δικούς τους μυστικούς αλγόριθμους/πρωτόκολλα
- Crypto Snake Oil (Bruce Schneier)

Οι κανόνες του Kerchoffs (1883) - (3)

Αρχή 1
Το κρυπτοσύστημα θα πρέπει να είναι *πρακτικά* απρόσβλητο, αν δεν γίνεται θεωρητικά

- Διάρκεια Κρυπτανάλυσης > Διάρκεια Ζωής Μηνύματος
- Μικρή Πιθανότητα Επιτυχίας
- Υπολογιστική Ασφάλεια

Εμπειρική αρχή - δεν αντιστοιχίζονται σε κάτι πρακτικό

Αποδείξιμη Ασφάλεια

Ιδέα
Μαθηματική (Λογική) απόδειξη ότι το κρυπτοσύστημα έχει κάποιες ιδιότητες ασφάλειας.

Παράδειγμα: Τέλεια μυστικότητα (Shannon)

Μπορεί να εφαρμοστεί στην κρυπτογραφία δημοσίου κλειδιού; Γιατί;

Επαναχρησιμοποίηση δημοσίου κλειδιού

Σημασιολογική Ασφάλεια

Βασική ιδέα (Goldwasser, Micali):

Χαλαρώνουμε τις απαιτήσεις ασφάλειας για να οδηγηθούμε σε έναν πρακτικό ορισμό

Λαμβάνουμε υπ' όψιν:

- την υπολογιστική ισχύ του $\mathcal{A}$
- την πιθανότητα επιτυχίας
- το είδος των επιθέσεων

Διαίσθηση
Ένας υπολογιστικά περιορισμένος $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να μάθει τίποτε χρήσιμο από το κρυπτοκείμενο παρά μόνο με αμελητέα πιθανότητα

Ρητή Προσέγγιση

Ορισμός
Ένα κρυπτοσύστημα είναι (τ, ϵ) ασφαλές αν οποιοσδήποτε $\mathcal{A}$ σε χρόνο (πλήθος λειτουργιών) το πολύ τ, δεν μπορεί να το σπάσει με πιθανότητα καλύτερη από ϵ

Κάθε κρυπτοσύστημα με μήκος κλειδιού λ bits έχει ασφάλεια στην καλύτερη περίπτωση $(\tau, \frac{\tau}{2^\lambda})$

Επίθεση Brute Force
Με $\tau = 2^\lambda$ λειτουργίες το κρυπτοσύστημα θα σπάσει. Θα θέλαμε να είναι το καλύτερο δυνατό που μπορεί να γίνει.

Πρακτικά
Για συμμετρικά κρυπτοσυστήματα σήμερα με βραχυχρόνιες απαιτήσεις ασφάλειας $2^{80} < \tau < 2^{100}$ και $\epsilon = 2^{-64}$

Για μακροχρόνιες απαιτήσεις ασφαλείας: $\tau = 2^{128}$

Κβαντικοί υπολογιστές $\tau = 2^{256}$ (Αλγόριθμος αναζήτησης

Ρητή Προσέγγιση (2)

Κάποιοι αριθμοί
Distributed.net RC5 brute force cracking

- 56bits - 250 μέρες - 1997
- 64bits - 5 χρόνια - 2002
- 72bits - δεν έχει σπάσει ακόμα (μετά 15 χρόνια είχε εξερευνηθεί το 5% του K)

- Bitcoin miners: Υπολογισμός περίπου 2^93 hashes όλο το 2022
- 2^88 αριθμός δευτερολέπτων από το Big - Bang

Δεν χρησιμοποιείται γιατί:

- Δεν λαμβάνει υπ'όψιν το υπολογιστικό μοντέλο (παράλληλοι υπολογιστές, εξειδικευμένο HW κτλ.)
- Δεν ασχολείται με το τι θα γίνει μετά το ϵ

Ασυμπτωτική Προσέγγιση

Ορισμός
Ένα κρυπτοσύστημα είναι ασφαλές αν οποιοσδήποτε περιορισμένος $\mathcal{A}$ έχει αμελητέα πιθανότητα να το σπάσει (σε σχέση με την παράμετρο ασφάλειας)

Παρατηρήσεις:

- περιορισμένος = Probabilistic Polynomial Time
- Ισχύει για μεγάλες τιμές του λ
- Συνέπεια του $|K| < |M|$
- Επιτρέπει προσαρμογή της ασφάλειας με αλλαγή του μήκους του κλειδιού

Στόχος αντιπάλου

- Ο $\mathcal{A}$ θέλει να υπολογίσει το κατηγόρημα $q : M \to \{0, 1\}$
- Γενικά: $Pr_{m \in M}[q(m) = 0] = Pr_{m \in M}[q(m) = 1] = \frac{1}{2}$
- Το μήκος των κρυπτοκειμένων είναι το ίδιο (δεν διαρρέει πληροφορία)

Το πλεονέκτημα του $\mathcal{A}$
$\mathrm{Adv}_q^{\mathcal{A}}(\lambda) = |\Pr[\mathcal{A}(c) = q(\mathrm{Dec}(key, c))] - \frac{1}{2}|$

Αν ο $\mathcal{A}$ μαντέψει στην τύχη έχει $Adv_q(\mathcal{A}) = 0$

Σημασιολογική ασφάλεια - ορισμός

Ορισμός
Ένα κρυπτοσύστημα $\mathcal{CS}$ είναι σημασιολογικά ασφαλές όταν $\forall$ PPT $\mathcal{A}$, $\forall q$:

$$\mathrm{Adv}_q^{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathrm{negl}(\lambda)$$

Αμελητέα συνάρτηση
Οποιαδήποτε συνάρτηση f για την οποία για κάθε πολυώνυμο p υπάρχει n_0 ώστε $\forall n \geq n_0 : f(n) < \frac{1}{p(n)}$

Δηλαδή: Μεγαλώνει με πιο αργό ρυθμό από αντίστροφο πολυώνυμο

Παραδείγματα αμελητέων συναρτήσεων: $2^{-n}, 2^{-\sqrt{n}}$

Σημασιολογική ασφάλεια (2)

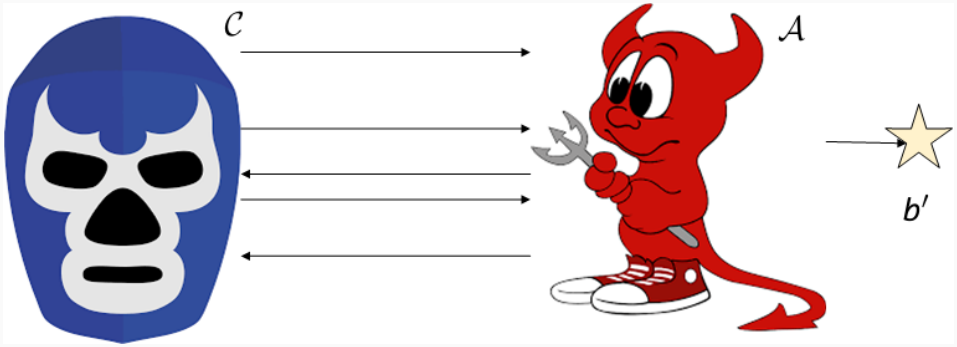
Παρατηρήσεις

- Ο τυπικός ορισμός ενσωματώνει την παράμετρο ασφαλείας
- Δύσχρηστος ορισμός - δεν ορίζουμε τι ξέρει ο $\mathcal{A}$ και τι διαδικασία ακολουθεί για το 'σπάσιμο'
- Ανάγκη εύρεση κατηγορήματος - που δεν ικανοποιεί τον ορισμό.

Μη Διακρισιμότητα (Indistinguishability)

Οντότητα (challenger - αναπαριστά το κρυπτοσύστημα)

Παίγνιο Μη Διακρισιμότητας μεταξύ των $\mathcal{A}, \mathcal{C}$



- Ανταλλαγή Μηνυμάτων μεταξύ $\mathcal{A}, \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}$ Παράγει δύο μηνύματα m_0, m_1
- $\mathcal{C}$: Διαλέγει ένα τυχαίο bit $b \leftarrow\$ \{0, 1\}$
- $\mathcal{C}$: Παράγει και απαντά με το $c_b = \text{Enc}(m_b)$
- $\mathcal{A}$ Μαντεύει ένα bit b'
- Κερδίζει αν μαντέψει την επιλογή του αντιπάλου

Μη Διακρισιμότητα (Indistinguishability) - (2)

Δηλαδή:

$$IND - Game(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, b' = b \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πλεονέκτημα

$\text{Adv}^{\mathcal{A}}_{IND}(\lambda) = |\Pr[IND - Game(\mathcal{A}) = 1] - \frac{1}{2}|$

Ορισμός

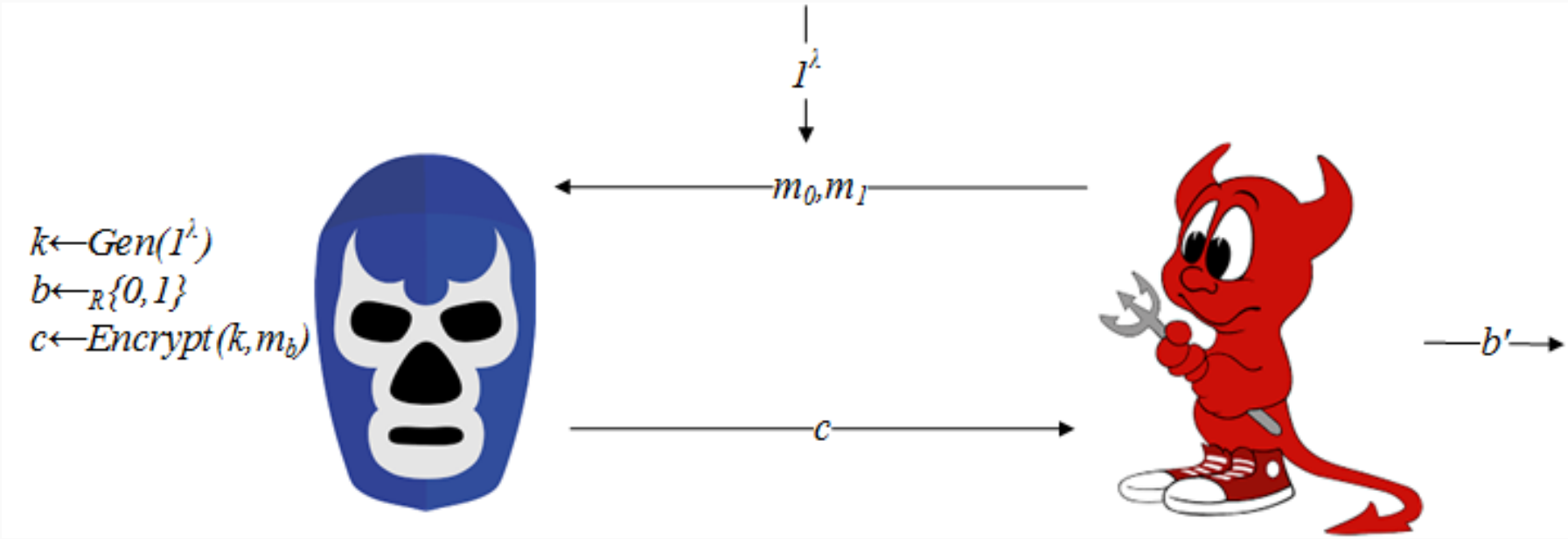
Ένα κρυπτοσύστημα διαθέτει την ιδιότητα της μη διακρισιμότητας όταν $\forall$ PPT $\mathcal{A}$:

$$\text{Adv}^{\mathcal{A}}_{IND}(\lambda) = \text{negl}(\lambda)$$

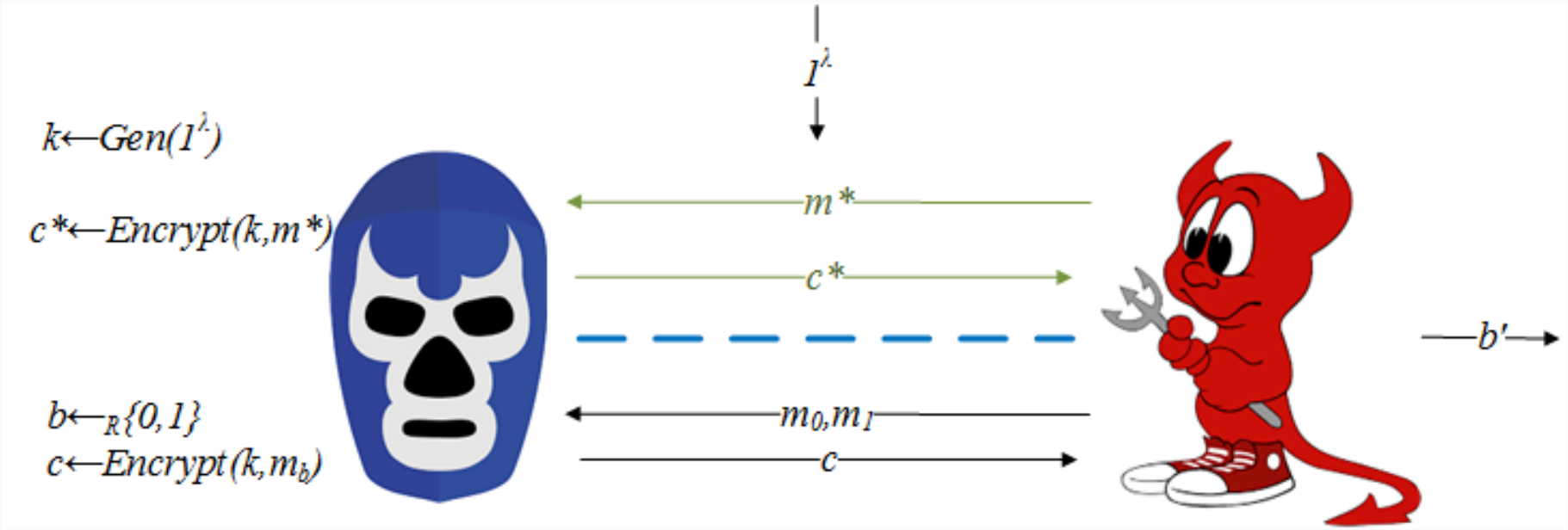
Θεώρημα

Σημασιολογική Ασφάλεια $\Leftrightarrow$ Μη-Διακρισιμότητα

IND-EAV


1^λ
m_0, m_1
$k \leftarrow Gen(1^\lambda)$
$b \leftarrow_R \{0,1\}$
$c \leftarrow Encrypt(k, m_b)$
c
b'

IND-CPA


1^λ
$k \leftarrow Gen(1^\lambda)$
$c^* \leftarrow Encrypt(k, m^*)$
m^*
c^*
$b \leftarrow_R \{0,1\}$
$c \leftarrow Encrypt(k, m_b)$
m_0, m_1
c
b'

Παρατηρήσεις IND-CPA

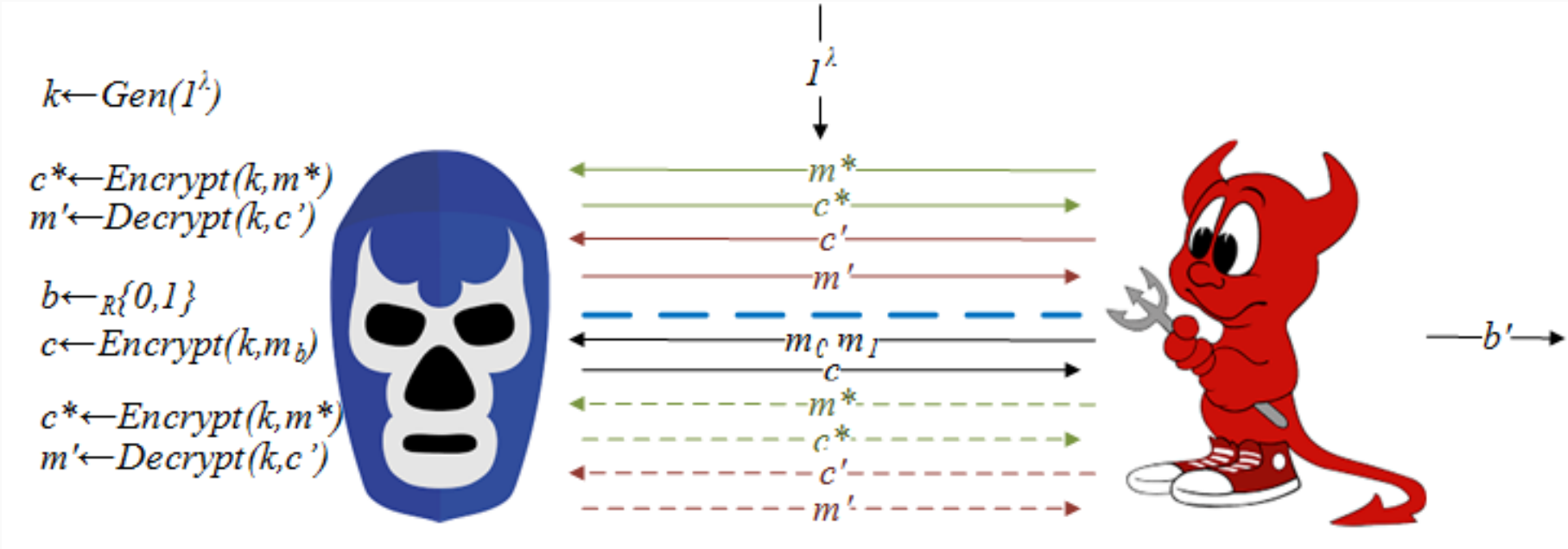
Θεώρημα

Ένα κρυπτοσύστημα με ντετερμινιστικό αλγόριθμο κρυπτογράφησης δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα IND-CPA.

Απόδειξη

- Ο $\mathcal{A}$ θέτει $m^* = m_0$ και λαμβάνει την κρυπτογράφηση c^*
- Η απάντηση του είναι $b' = \begin{cases} 0, c^* = c \\ 1, \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Ο $\mathcal{A}$ κερδίζει πάντα $\Pr[IND - CPA(\mathcal{A}) = 1] = 1$

IND-CCA


$k \leftarrow Gen(1^\lambda)$
$c^* \leftarrow Encrypt(k, m^*)$
$m' \leftarrow Decrypt(k, c')$
$b \leftarrow_R \{0,1\}$
$c \leftarrow Encrypt(k, m_b)$
$c^* \leftarrow Encrypt(k, m^*)$
$m' \leftarrow Decrypt(k, c')$
1^λ
m^*
c^*
c'
m'
m_0, m_1
c
m^*
c^*
c'
m'
b'

Παρατηρήσεις

- Παραλλαγή IND-CCA2: Επιτρέπεται χρήση του μαντείου αποκρυπτογράφησης μετά το c (adaptive IND-CCA)
- Παραλλαγή IND-CCA1: αλλιώς ($\mathcal{A}$ έχει μάθει ανεξάρτητες απο-κρυπτογραφήσεις)
- Στο παίγνιο IND-CCA2 ο $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να ρωτήσει τον C για την αποκρυπτογράφηση του c
- Μπορεί όμως να:
  - Μετατρέψει το c σε $\hat{c}$
  - Ζητήσει την αποκρυπτογράφηση του $\hat{c}$ σε $\hat{m}$
  - Να μετατρέψει το $\hat{m}$ σε m, κερδίζοντας με πιθανότητα 1

Malleability

Χειρισμός κρυπτοκειμένων χωρίς αποκρυπτογράφηση

Malleable (εύπλαστο) Κρυπτοσύστημα
Επιτρέπει στον $\mathcal{A}$ να φτιάξει, γνωρίζοντας μόνο το κρυπτοκείμενο $c = \mathrm{Enc}(m)$, ένα *έγκυρο* κρυπτοκείμενο $c' = \mathrm{Enc}(f(m))$, για κάποια, συνήθως πολυωνυμικά αντιστρέψιμη, συνάρτηση f γνωστή σε αυτόν.

Κάποιες φορές είναι επιθυμητή και κάποιες όχι.

- Ομομορφικά Κρυπτοσυστήματα: Αποτίμηση μερικών πράξεων στα κρυπτοκείμενα (ηλ. ψηφοφορίες)
- Πλήρως Ομομορφικά Κρυπτοσυστήματα (Gentry 2010): Αποτίμηση οποιουδήποτε κυκλώματος στα κρυπτοκείμενα
- Δεν μπορούν να είναι IND-CCA2, ... αλλά είναι πολύ χρήσιμα

Σημαντική ιδιότητα
Non-malleability $\Leftrightarrow$ IND-CCA2

Αποδείξεις Ασφάλειας

Κρυπτογραφικές Αναγωγές

Γενική Μορφή
Αν ισχύει η υπόθεση $\mathcal{Y}$, τότε το κρυπτοσύστημα $\mathcal{CS}$ είναι ασφαλές (υπό συγκεκριμένο ορισμό).

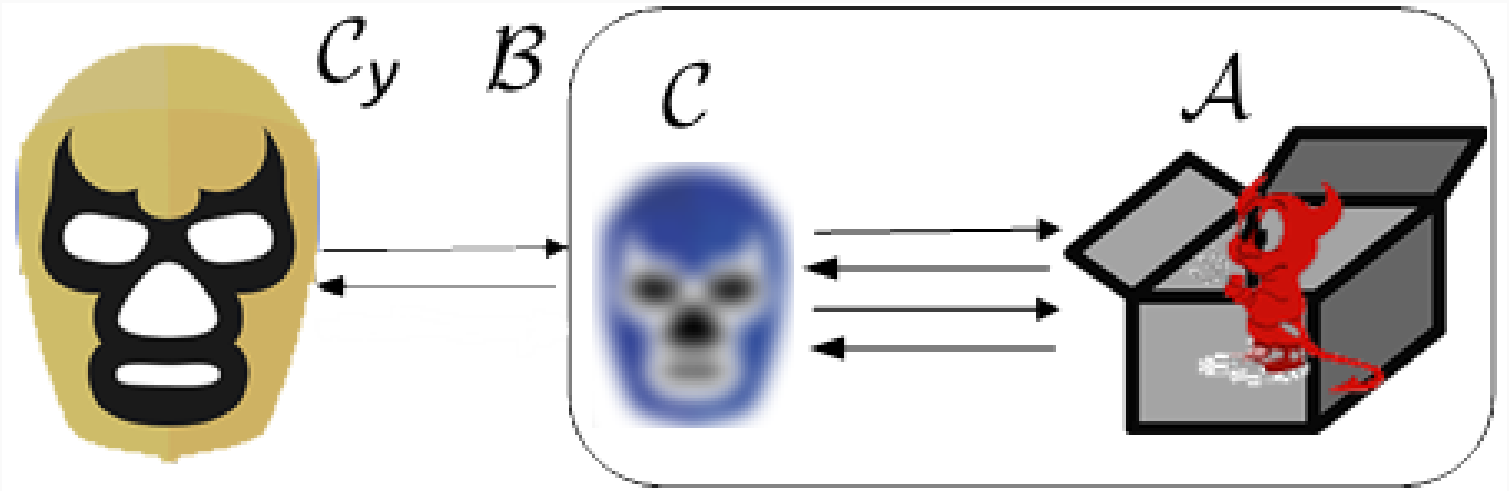
Αντιθετοαντιστροφή
Αν το $\mathcal{CS}$ ΔΕΝ είναι ασφαλές (υπό συγκεκριμένο ορισμό), τότε δεν ισχύει η $\mathcal{Y}$.

$\mathcal{Y}$: Δυσκολία παραγοντοποίησης, δυσκολία εύρεσης διακριτού λογαρίθμου κλπ.

Κατασκευαστική απόδειξη

- $\mathcal{CS}$ μη ασφαλές $\Rightarrow \exists$ PPT $\mathcal{A}$ ο οποίος παραβιάζει τον ορισμό ασφάλειας
- *Κατασκευάζουμε* PPT αλγόριθμο $\mathcal{B}$, ο οποίος αλληλεπιδρά με τον $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ ο οποίος προσπαθεί να 'υπερασπιστεί' την $\mathcal{V}$
- Ο $\mathcal{B}$ για να καταρρίψει την $\mathcal{V}$ χρησιμοποιεί εσωτερικά σαν υπορουτίνα τον $\mathcal{A}$(black box access) παριστάνοντας τον $\mathcal{C}$ στο παίγνιο μη διακρισιμότητας του $\mathcal{CS}$

Σχηματικά



Παρατηρήσεις

Κανόνες Ορθότητας

- Προσομοίωση: Ο $\mathcal{A}$ δεν θα πρέπει να ξεχωρίζει τον challenger του $\mathcal{B}$ από τον κανονικό challenger.
- Πιθανότητα επιτυχίας: Αν ο $\mathcal{A}$ έχει μη αμελητέα πιθανότητα επιτυχίας τότε και ο $\mathcal{B}$ θα πρέπει να έχει μη αμελητέα πιθανότητα
- Πολυπλοκότητα: Ο $\mathcal{B}$ θα πρέπει να είναι PPT. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όποια επιπλέον εσωτερική επεξεργασία πρέπει να είναι πολυωνυμική
- Πρέπει να είναι όσο πιο tight γίνεται ($t_{\mathcal{B}} \approx t_{\mathcal{A}}$ και $\epsilon_{\mathcal{B}} \approx \epsilon_{\mathcal{A}}$)

Συμπεράσματα-Συζήτηση

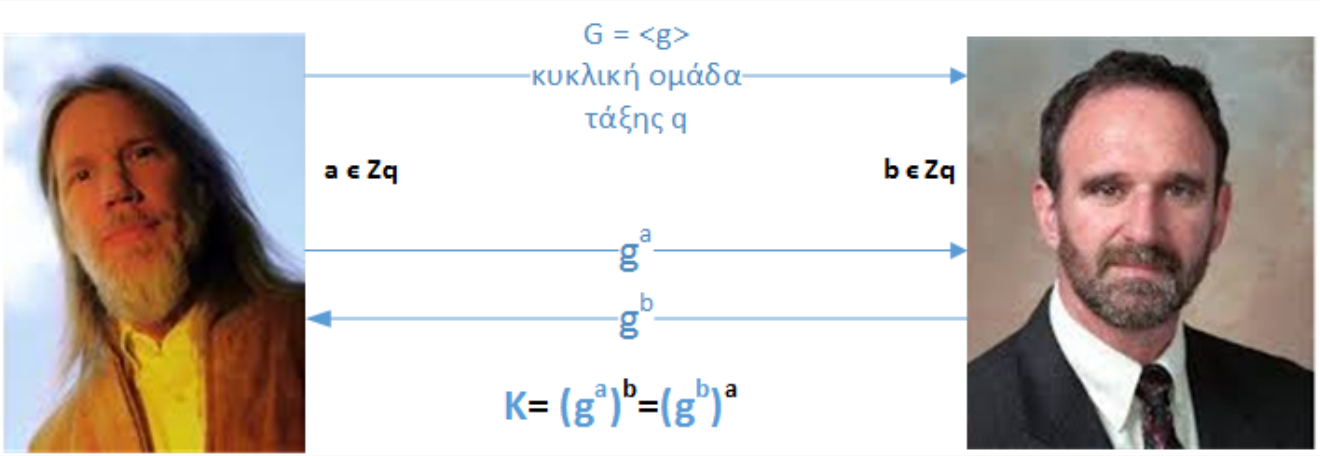
Κρυπτογραφικές Αναγωγές

- Παρέχουν σχετικές εγγυήσεις (Δύσκολο Πρόβλημα, Μοντέλο Ασφάλειας)
- Δίνουν ευκαιρία να ορίσουμε καλύτερα το κρυπτοσύστημα/πρωτόκολλο
- Πρακτική Χρησιμότητα: Ρύθμιση Παραμέτρου Ασφάλειας
- Συγκέντρωση Κρυπταναλυτικών Προσπαθειών στο Πρόβλημα Αναγωγής και όχι σε κάθε κρυπτοσύστημα ξεχωριστά
- Πιο σημαντικές όσο πιο πολύπλοκο γίνεται το πρωτόκολλο
- Αποδεικνύουν την ασφάλεια του μοντέλου, αλλά:
  - Πόσο αναπαριστά το μοντέλο την πραγματικότητα περίπτωση KRACK attack on WPA2
  - Δεν σημαίνει ότι οποιαδήποτε υλοποίηση θα είναι ασφαλής

Ανταλλαγή Κλειδιού Diffie Hellman

Το πρωτόκολλο DHKE

Αντί για Alice και Bob...



Πρωτόκολλο **Δημιουργίας** Κλειδιού

Απαιτήσεις:

Συνήθως: $\mathbb{G}$ υποομάδα τάξης πρώτου του $\mathbb{Z}_p^*$ (με p πρώτο) ή ελλειπτικές καμπύλες

Εφαρμογές: SSL, TLS, IPSEC

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα DLP

DLP - Το πρόβλημα του Διακριτού Λογάριθμου

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης q και ένα τυχαίο στοιχείο $y \in \mathbb{G}$

Να υπολογιστεί $x \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $g^x = y$
δηλ. το $log_g y \in \mathbb{Z}_q$

Αγνοούμε δεδομένα στο πρωτόκολλο DHKE

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα CDHP

CDHP - Το υπολογιστικό πρόβλημα Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία

$y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$

Να υπολογιστεί το $g^{x_1 \cdot x_2}$

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα DDHP

Μπορούμε να δοκιμάζουμε στοιχεία

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$

Να εξεταστεί αν $y = g^{x_1 \cdot x_2}$

ή ισοδύναμα

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman

Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις τριάδες $(g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2})$ και (g^{x_1}, g^{x_2}, y);

Σχέσεις Προβλημάτων

CDHP $\leq$ *DLP*

Αν μπορούμε να λύσουμε το *DLP*, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε τα x_1, x_2 από τα y_1, y_2 και στην συνέχεια το $g^{x_1 \cdot x_2}$

DDHP $\leq$ *CDHP*

Αν μπορούμε να λύσουμε το *CDHP*, υπολογίζουμε το $g^{x_1 \cdot x_2}$ και ελέγχουμε ισότητα με το y

Δηλαδή: *DDHP* $\leq$ *CDHP* $\leq$ *DLP*

Δεν γνωρίζουμε αν ισχύει η αντίστροφη σειρά - ισοδυναμία
Όμως: Υπάρχουν ομάδες όπου το *DDHP έχει* αποδειχθεί εύκολο, ενώ *CDHP δεν* έχει αποδειχθεί εύκολο
Μάλλον: *DDHP* $<$ *CDHP*

DDH σε μορφή παιγνίου μη διακρισιμότητας

Κοινή είσοδος: παράμετρος ασφάλειας λ.

Λειτουργίες $\mathcal{C}$

- Παραγωγή: $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης πρώτου q.
- Επιλογή $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_q$, $y \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{G}$
- Υπολογισμός $g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}$
- Επιλογή τυχαίου bit $b \in \{0, 1\}$
- Αν $b = 0$ τότε αποστολή $\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y' = g^{x_1 x_2}$ στον $\mathcal{A}$
- Αν $b = 1$ τότε αποστολή $\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y' = y$ στον $\mathcal{A}$

Ο $\mathcal{A}$ υπολογίζει b'.

Αν $b' \neq b$ τότε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού είναι `Failure`, αλλιώς `Success`

Ασφάλεια DHKE

Πλεονέκτημα $\mathcal{A}$

$$\mathsf{Adv}^{\mathrm{ddh}}_{\mathcal{A}}(\lambda) =$$
$$|\Pr[\mathcal{A}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1] - \Pr[\mathcal{A}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y) = 1]|$$

Η υπόθεση DDH ισχύει αν $\forall$ PPT $\mathcal{A}$: $\mathsf{Adv}^{\mathrm{ddh}}_{\mathcal{A}}(\lambda) \leq \mathsf{negl}(\lambda)$

Διαίσθηση
Ο $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να διακρίνει το κλειδί από ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας στην οποία ανήκει

Ισοδύναμα
Ο $\mathcal{A}$ δεν αποκτά καμία χρήσιμη πληροφορία για το κλειδί που δημιουργείται.

Μοντέλο ασφάλειας: παθητικός αντίπαλος

Παιχνίδι ανταλλαγής κλειδιού $KEG_{\mathcal{A},\Pi}(\lambda)$

Κοινή είσοδος: λ. Λειτουργίες $\mathcal{C}$:

- Δημιουργεί ομάδα $\mathbb{G}$
- Εκτελεί το πρωτοκόλλο $\Pi(1^\lambda)$
- Παράγεται: (τ, k)
  - τ transcript: Τα μηνύματα που ανταλλάσσονται (δημόσια)
  - k: Το κλειδί που παράγεται
- Επιλογή τυχαίου $b \in \{0, 1\}$
- Αν $b = 1$ επιλογή τυχαίου k' και αποστολή (τ, k') στον $\mathcal{A}$
- Αν $b = 0$ αποστολή (τ, k) στον $\mathcal{A}$

Ο $\mathcal{A}$ υπολογίζει b'. Αν $b' \neq b$ τότε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού είναι `Failure` (ήττα $\mathcal{A}$), αλλιώς `Success` (νίκη $\mathcal{A}$)

Ορισμός ασφάλειας DHKE

Πλεονέκτημα $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Adv}^{\mathrm{keg}}_{\mathcal{A},\Pi}(\lambda) = |\Pr[\mathit{KEG}_{\mathcal{A},\Pi}(\lambda) = \mathit{Success}] - \tfrac{1}{2}|$$

Ένα πρωτόκολλο ανταλλαγής κλειδιού Π είναι ασφαλές, αν κάθε PPT *παθητικός* αντίπαλος $\mathcal{A}$ έχει αμελητέο πλεονέκτημα ως προς την παράμετρο ασφάλειας να επιτύχει στο *KEG*

$$\mathrm{Adv}^{\mathrm{keg}}_{\mathcal{A},\Pi}(\lambda) \leq \mathrm{negl}(\lambda)$$

Δυσκολία DLP, CDHP αναγκαίες, αλλά όχι ικανές συνθήκες.

Απόδειξη ασφάλειας DHKE

Αν το DDHP είναι δύσκολο, τότε το πρωτόκολλο είναι ασφαλές (απέναντι σε παθητικό αντίπαλο)

Απόδειξη - Σχεδιάγραμμα DHKE μη ασφαλές: $\exists \mathcal{A}$ ώστε $\mathrm{Adv}^{\mathrm{keg}}_{\mathcal{A},DHKE}(\lambda) > \mathrm{negl}(\lambda)$

Θα κατασκευάσουμε αντίπαλο PPT $\mathcal{B}$ ως προς την υπόθεση *DDH*:

- Όταν λάβει το μήνυμα από τον $\mathcal{C}_{DDH}$ το προωθεί στον $\mathcal{A}$
- Μορφή μηνύματος $(\tau, k') = ((\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2})), y')$
- Όταν ο $\mathcal{A}$ απαντήσει, προωθεί το b'.

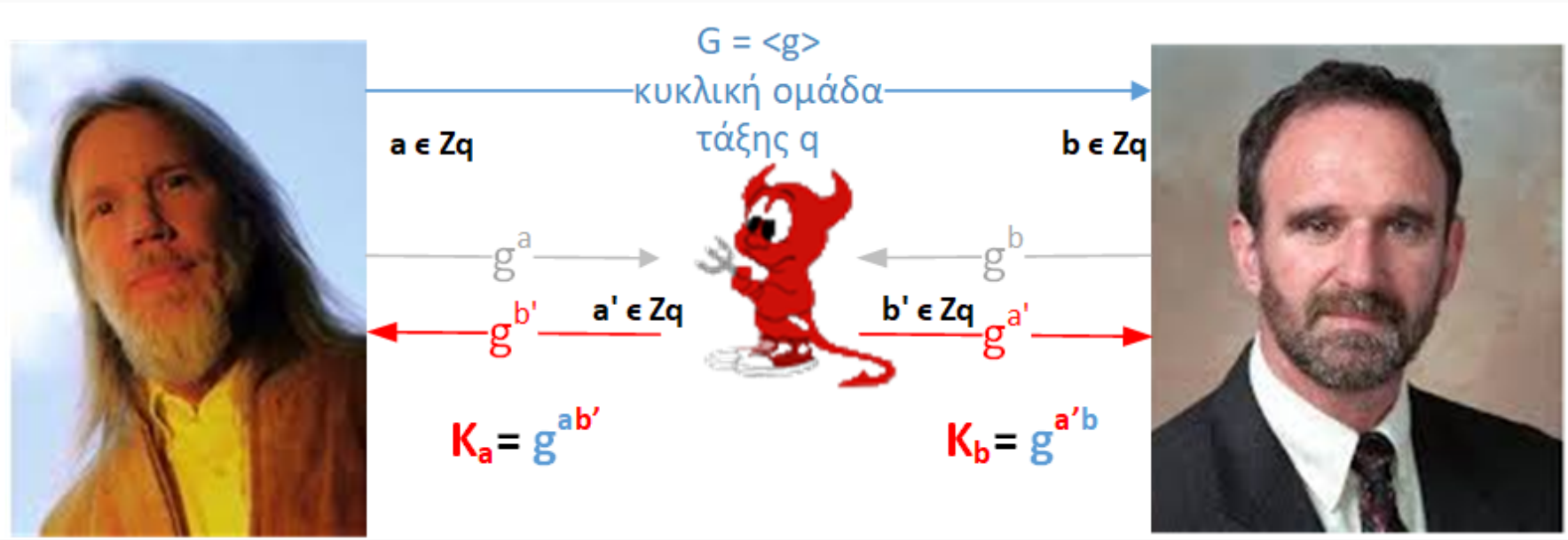
Απόδειξη ασφάλειας DHKE (2)

$$
\begin{aligned}
&\Pr[KEG_{\mathcal{A},DHKE}(\lambda) = \mathit{Success}] \\
&= \frac{1}{2}\Pr[KEG_{\mathcal{A},DHKE}(\lambda) = \mathit{Success} | b = 1] + \frac{1}{2}\Pr[KEG_{\mathcal{A},DHKE}(\lambda) = \mathit{Success} | b = 0] \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{y}) = 1\right] + \frac{1}{2}\Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 0\right] \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{y}) = 1\right] + \frac{1}{2}(1 - \Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1\right]) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{y}) = 1\right] - \Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1\right]) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{y}) = 1\right] - \Pr\left[\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1\right]| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathsf{Adv}^{\mathrm{ddh}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathsf{negl}(\lambda)
\end{aligned}
$$

ΑΤΟΠΟ

Ενεργοί Αντίπαλοι

Η σημασία του μοντέλου ασφάλειας - Man In The Middle Attacks



Πώς είμαι σίγουρος ότι μιλάω με αυτόν που *νομίζω* ότι μιλάω;
Λύση: ψηφιακές υπογραφές - ψηφιακό πιστοποιητικό (εγγύηση 'έμπιστου' τρίτου)

Πραγματικά παραδείγματα

Superfish (02/2015)

- Προεγκατεστημένο λογισμικό Visual Discovery: προσπάθεια για εμφάνιση διαφημίσεων όχι με βάση κείμενο αλλά με βάση εικόνες
- Παρακολούθηση δικτυακής κίνησης και μέσω https
- Λογισμικό proxy που λειτουργεί ως MiTM
- Εγκατάσταση και (self signed) ψηφιακού πιστοποιητικού

Και άλλες ανάλογες περιπτώσεις: πχ. DELL - 10/2015