Κρυπτοσυστήματα Διακριτού Λογαρίθμου

Παναγιώτης Γροντάς - Άρης Παγουρτζής

02/12/2022

ΕΜΠ - Κρυπτογραφία

Περιεχόμενα

DLP

Προβλήματα Διακριτού Λογαρίθμου - (Υπενθύμιση)

DLP - Το πρόβλημα του Διακριτού Λογαρίθμου
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης q και ένα τυχαίο στοιχείο $y \in \mathbb{G}$

Να υπολογιστεί $x \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $g^x = y$ δηλ. το $log_g y \in \mathbb{Z}_q$

CDHP - Το υπολογιστικό πρόβλημα Diffie Hellman
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$

Να υπολογιστεί το $g^{x_1 \cdot x_2}$

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία $y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$

Να εξεταστεί αν $y = g^{x_1 \cdot x_2}$ ή ισοδύναμα μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις τριάδες $(g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2})$ και (g^{x_1}, g^{x_2}, y);

Σχέσεις Προβλημάτων - (Υπενθύμιση)

$CDHP \leq DLP$
Αν μπορούμε να λύσουμε το *DLP*, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε τα x_1, x_2 από τα y_1, y_2 και στην συνέχεια το $g^{x_1 \cdot x_2}$

$DDHP \leq CDHP$
Αν μπορούμε να λύσουμε το *CDHP*, υπολογίζουμε το $g^{x_1 \cdot x_2}$ και ελέγχουμε ισότητα με το y

Δηλαδή: $DDHP \leq CDHP \leq DLP$

Αλγόριθμοι επίλυσης DLP

Brute Force
Για ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης q λ bits

Δοκιμή όλων των $x \in \mathbb{Z}_q$ μέχρι να βρεθεί τέτοιο ώστε $g^x = y$

Πολυπλοκότητα $O(2^\lambda)$

Γενικευμένη μέθοδος - δεν εξαρτάται απο χαρακτηριστικά ομάδας

Αλγόριθμος Baby step - Giant Step (Shanks)

Αλγόριθμος Meet-In-The Middle

- Στόχος: εύρεση $x : y = g^x$
- Βασική ιδέα: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists k, a, b \in \mathbb{Z} : \ x = ak + b$,
- $y = g^x \Rightarrow y = g^{ak} \cdot g^b \Rightarrow yg^{-ak} = g^b$
- Θα υπολογίζουμε g^b και yg^{-ak} μέχρι να συναντηθούν
  1. Ξεκινάμε στη 'μέση': $k = \lceil \sqrt{q} \rceil$
  2. **Baby steps - μέγεθος** 1:
     Υπολογίζουμε $g^b, b \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ και αποθηκεύουμε
  3. **Giant steps - μέγεθος** k:
     Υπολογίζουμε $yg^{-ak}, a \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ και το αναζητούμε στα αποτελέσματα του Βημ. 2
  4. Όταν βρεθεί υπολογίζουμε: $x = ak + b$

Πολυπλοκότητα Χρόνου: $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - Βέλτιστη για γενικευμένο

Πολυπλοκότητα Χώρου: $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - Βέλτιστη αυτή του Pollard rho σταθερή

Παράδειγμα Baby step - Giant Step

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ **στο** $\mathbb{Z}_{29}^* = \langle 2 \rangle$, $\lceil \sqrt{29} \rceil = 6$

- $b \in \{0 \cdots 5\}$
- $2^0 = 1 \pmod{29}$
- $2^1 = 2 \pmod{29}$
- $2^2 = 4 \pmod{29}$
- $2^3 = 8 \pmod{29}$
- $2^4 = 16 \pmod{29}$
- $2^5 = 3 \pmod{29}$

- $a \in \{0 \cdots 5\}$
- $17 \cdot 2^{-0 \cdot 6} = 17 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-1 \cdot 6} = 27 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-2 \cdot 6} = 19 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-3 \cdot 6} = 8 \pmod{29}$
- Βρέθηκε

Άρα $x = 18 + 3 = 21$

Πράγματι: $2^{21} = 17 \pmod{29}$

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman - Ιδέα

Παρατήρηση
Η δυσκολία του DLP σε μια ομάδα $\mathbb{G}$ εξαρτάται από τη δυσκολία του στις διάφορες υποομάδες της.

Συγκεκριμένα
Παραγοντοποίηση της τάξης

(πχ. στο $\mathbb{Z}_p^*$: $p-1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ με p_i πρώτο)

Επίλυση DLP σε κάθε υποομάδα (εύρεση $x \pmod{p_i^{e_i}}$)

Συνδυασμός με CRT

Smooth Number
Μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε μικρούς πρώτους - Αν ισχύει για την τάξη επιταχύνει σημαντικά τον αλγόριθμο - κάνει το DLP πιο εύκολο.

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman

- Παραγοντοποιούμε την τάξη: $p-1=\prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$
- Για κάθε p_i γράφουμε $x = x_0 + x_1 p_i + \cdots + x_{e_i-1} p_i^{e_i-1} \pmod{p_i^{e_i}}$ με $x_j \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$
- Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές ως εξής:
- Για το x_0 ισχύει: $y^{\frac{p-1}{p_i}} = g^{x_0 \frac{p-1}{p_i}} \pmod{p}$ (1) επειδή:

$$y^{\frac{p-1}{p_i}} = (g^x)^{\frac{p-1}{p_i}} = g^{(x_0 + x_1 p_i + \cdots + x_{e_i-1} p_i^{e_i-1}) \frac{p-1}{p_i}} =$$
$$g^{(x_0 + K p_i) \frac{p-1}{p_i}} = g^{x_0 \frac{p-1}{p_i}} g^{K p_i \frac{p-1}{p_i}} =$$
$$g^{x_0 \frac{p-1}{p_i}} \pmod{p}$$

- Υπολογισμός x_0 (πχ. είτε με brute force (συνήθως) είτε με αλγόριθμο Shanks για πιο μεγάλες τιμές)

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman (2)

Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων συντελεστών:

- Δημιουργούμε ακολουθία $\{y_j\}$ με $y_0 = y$ και
- $y_j = y_{j-1} \cdot g^{-(x_0 + x_1 p_i + \cdots + x_{j-1} {p_i}^{j-1})} \pmod{p}$
- Γενικεύοντας την (1) έχουμε: $y_j^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} = g^{x_j \frac{p-1}{p_i}}$

$$
\begin{aligned}
y_j^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} &= (g^{x-(x_0 + x_1 p_i + \cdots + x_{j-1} {p_i}^{j-1})})^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} \\
&= (g^{x_j {p_i}^j + \cdots + x_{e_i-1} p_i^{e_i-1}})^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} = (g^{x_j {p_i}^j + K p^{j+1}})^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} \\
&= (g^{x_j {p_i}^j})^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} (g^{K p^{j+1}})^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} = (g^{x_j})^{\frac{p-1}{p_i}}
\end{aligned}
$$

- Υπολογίζουμε το x_j

Συνδυασμός λύσεων με CRT

Pohlig-Hellman - παράδειγμα

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ **στο** $\mathbb{Z}_{29}^* = \langle 2 \rangle$
Παραγοντοποιούμε την τάξη: $28 = 2^2 7$

$x_2 = x_{20} + 2x_{21} \pmod 4$ και

$x_7 = x_{70} \pmod 7$

Υπολογισμός x_{20} **για το** x_2
$y^{\frac{p-1}{2}} = g^{x_{20}\frac{p-1}{2}} \Rightarrow 17^{14} = 2^{14x_{20}} \Rightarrow 2^{14x_{20}} = 28 = -1 \pmod{29}$

Άρα $x_{20} = 1$

Υπολογισμός y_1 **για το** x_2
$y_1 = yg^{-x_{20}} = 17 \cdot 2^{-1} = 17 \cdot 15 = 23 \pmod{29}$

Pohlig-Hellman - παράδειγμα

Υπολογισμός x_{21} για το x_2

$y_1^{\frac{p-1}{4}} = g^{x_{21}\frac{p-1}{2}} \Rightarrow 23^7 = 2^{14x_{21}} \Rightarrow 2^{14x_{21}} = 1 \pmod{29}$

Άρα $x_{21} = 0$

Άρα $x_2 = 1 + 0 = 1 \pmod 4$

Υπολογισμός x_{70} για το x_7

$y^{\frac{p-1}{7}} = g^{x_{70}\frac{p-1}{7}} \Rightarrow 17^4 = 2^{4x_{70}} \Rightarrow 2^{4x_{70}} = 1 \pmod{29}$

Άρα $x_{70} = 0$

Άρα $x_7 = 0 \pmod 7$

Από $x_2 = 1 + 0 = 1 \pmod 4$ και $x_7 = 0 \pmod 7$ με CRT προκύπτει $x = 21$

Δυσκολία DDHP

Θεώρημα
Το DDHP δεν είναι δύσκολο στην $\mathbb{Z}_p^*$

Απόδειξη Μπορεί να κατασκευαστεί αποδοτικός αλγόριθμος διαχωρισμού τριάδας DH (g^a, g^b, g^{ab}) από μια τυχαία τριάδα (g^a, g^b, g^c).
Πώς: Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Legendre.

Το σύμβολο Legendre διαρρέει το DLP parity

$(\frac{g^x}{p}) = (g^x)^{\frac{p-1}{2}}$ και $g^{p-1} = 1 \pmod p$ (FLT)

g γεννήτορας: $g^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p \Rightarrow (\frac{g^x}{p}) = (-1)^x$

Αν x μονός τότε $(\frac{g^x}{p}) = -1$
Αν x ζυγός τότε $(\frac{g^x}{p}) = 1$

Δυσκολία DDHP

Για τυχαία τριάδα: $\Pr\left[\left(\frac{g^c}{p}\right) = 1\right] = \frac{1}{2}$

Για τριάδα DH: $\Pr\left[\left(\frac{g^{ab}}{p}\right) = 1\right] = \frac{3}{4}$

Algorithm 1 Ο αλγόριθμος διαχωρισμού

Υπολόγισε $\left(\frac{g^a}{p}\right), \left(\frac{g^b}{p}\right), \left(\frac{g^c}{p}\right)$

if $\left(\frac{g^c}{p}\right) = 1 \wedge \left(\left(\frac{g^a}{p}\right) = 1 \vee \left(\frac{g^b}{p}\right) = 1\right)$ **then**

| Επιστροφή ”Τριάδα Diffie Hellman”

else

| Επιστροφή ”Τυχαία Τριάδα”

end

Πλεονέκτημα: $\frac{3}{8}$ (γιατί;)

ΜΗ ΑΜΕΛΗΤΕΟ

Επιλογή Ομάδας $\mathbb{G}$

Καθορίζει τη δυσκολία του προβλήματος

- Υποομάδα πρώτης τάξης q του $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ με p, πρώτο
- safe prime $p = 2q + 1$ υποομάδα τετραγωνικών υπολοίπων του $\mathbb{Z}_p^*$
- Λόγοι:
  - Δύσκολο DDHP
  - Εύκολη εύρεση γεννήτορα
- Επίσης p Schnorr prime: $p = kq + 1$ με q πρώτο
- Όμως: Υποεκθετικοί αλγόριθμοι (index calculus)
- $(\mathcal{E}(\mathbb{F}_q), +)$ (Ελλειπτικές καμπύλες: 'Λογάριθμος' αφορά πρόσθεση)
  - ίδια επίπεδα ασφάλειας με μικρότερη τιμή κλειδιών

Μεγέθη

Symmetric Security	$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$
80 bits	1024	160
112 bits	2048	224
128 bits	3072	256
192 bits	7680	384
256 bits	15360	512

Το κρυπτοσύστημα ElGamal

Ορισμός ElGamal

Δημιουργία Κλειδιών: $\mathsf{KGen}(1^\lambda) = (y = g^x, x)$

- Επιλογή δύο μεγάλων πρώτων p, q ώστε $q \mid (p-1)$
- $\mathbb{G}$: υποομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$ - g γεννήτορας
- Ιδιωτικό κλειδί: $x \in_R \mathbb{Z}_q$
- Δημόσιο κλειδί: $y = g^x \bmod p$
- Επιστροφή $(\mathsf{pk}, \mathsf{sk}) = (y, x)$

Κρυπτογράφηση

- Επιλογή $r \in_R \mathbb{Z}_q$
- $\mathsf{Enc}_y(r, m) = (g^r \bmod p, (m \cdot y^r) \bmod p)$

Αποκρυπτογράφηση

- $\mathsf{Dec}_x(a, b) = b \cdot (a^x)^{-1} \bmod p$

Ορθότητα $\mathsf{Dec}_x(\mathsf{Enc}_y(r, m)) = (my^r)((g^r)^x)^{-1} = mg^{rx-rx} = m \pmod p$

Παρατηρήσεις: Πρακτικά Θέματα

Παράμετροι κρυπτογράφησης: p, q δεν χρειάζεται να αλλάζουν ανά χρήστη όπως στο RSA

Εκτέλεση KGen μια φορά για όλους τους χρήστες

Συνήθως: $|p| = 2048, |q| = 256$

Πιθανοτική Κρυπτογράφηση: Ένα μήνυμα έχει πολλά πιθανά κρυπτοκείμενα

Message expansion: Κρυπτοκείμενο διπλάσιο του μηνύματος

Παρατηρήσεις: Πρακτικά Θέματα (2)

Επιτάχυνση Κρυπτογράφησης:

Κόστος: 2 υψώσεις σε δύναμη - 1 πολλαπλασιασμός

Ύψωση σε δύναμη: Δεν εξαρτάται από το μήνυμα

Μπορεί να προεπιλεχθούν r και να προϋπολογιστούν οι δυνάμεις g^r, y^r

Επιτάχυνση Αποκρυπτογράφησης:

$(\mathrm{a}^x)^{-1} = (a^x)^{-1} a^{p-1} = a^{p-x-1} \pmod{p}$

1 ύψωση σε δύναμη - 1 πολλαπλασιασμός

ElGamal στην πράξη

Το μήνυμα πρέπει να είναι στοιχείο της ομάδας: $m \in \mathbb{G}$.

Όμως θα θέλαμε: $m \in \{0,1\}^*$

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να οριστεί κωδικοποίηση $f : \mathbb{G} \mapsto \{0,1\}^l$

Γενική Λύση: Hybrid Encryption

- $m \in \{0,1\}^*$
- $m_G \in_R \mathbb{G}$
- $k = \mathrm{H}(m_G)$ με H κατάλληλη συνάρτηση σύνοψης
- Αποστολή $(\mathrm{Enc}_{EG,\mathrm{pk}}(m_G), \mathrm{Enc}_{AES,k}(m))$

Γενίκευση: Key encapsulation primitives

Επανάληψη τυχαιότητας $\rightarrow$ Επίθεση KPA

KPA: Γνωρίζουμε ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένου για τα οποία έχει χρησιμοποιηθεί η ίδια τυχαιότητα

Επίθεση

$(c_r, c_1) = \mathrm{Enc}_y(r, m_1) = (g^r \bmod p, m_1 \cdot y^r \bmod p)$

$(c_r, c_2) = \mathrm{Enc}_y(r, m_2) = (g^r \bmod p, m_2 \cdot y^r \bmod p)$

Αν γνωρίζω το (m_1, c_1): $c_1 = m_1 \cdot y^r \pmod p \Rightarrow y^r = c_1 \cdot m_1^{-1} \pmod p$

Μπορώ να υπολογίσω το m_2 ως:

$m_2 = c_2 \cdot (y^r)^{-1} = c_2 \cdot (c_1 \cdot m_1^{-1})^{-1}$

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης - Μυστικότητα

Μυστικότητα ElGamal $\equiv$ *CDHP*

Αντιστοιχία δημοσίων στοιχείων

$$g^{x_1} \leftrightarrow g^r$$
$$g^{x_2} \leftrightarrow y = g^x$$
$$g^{x_1 x_2} \leftrightarrow y^r$$

Ευθύ: $EG \leq CDHP$**:**

1. **Επίλυση** *CDHP*
2. **Υπολογισμός** $g^{x_1 x_2} = y^r$
3. **Εύρεση αντιστρόφου του** y^r
4. **Αποκρυπτογράφηση**

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης - Μυστικότητα (2)

Αντίστροφα: $CDHP \leq EG$:

1. Αποκρυπτογράφηση EG (χωρίς ιδιωτικό κλειδί)
2. $\forall a \in \mathbb{G}$ μπορώ να χρησιμοποιήσω το EG ως oracle
3. Είσοδος: $y = g^{x_2}, c = (g^{x_1}, a)$ για $a \in_R \mathbb{G}$
4. Έξοδος $m \in \mathbb{G} : a = m \cdot g^{x_1 x_2}$
5. Άρα: $g^{x_1 x_2} = a \cdot m^{-1} \pmod{p}$

Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση El-Gamal διαθέτει την ιδιότητα **OW-CPA (One-Wayness under Chosen Plaintext Attack)**

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης IND-CPA

Θεώρημα
Αν το DDHP είναι δύσκολο στην $\mathbb{G}$, τότε το κρυπτοσύστημα El Gamal διαθέτει ασφάλεια $\mathrm{IND\text{-}CPA}$.

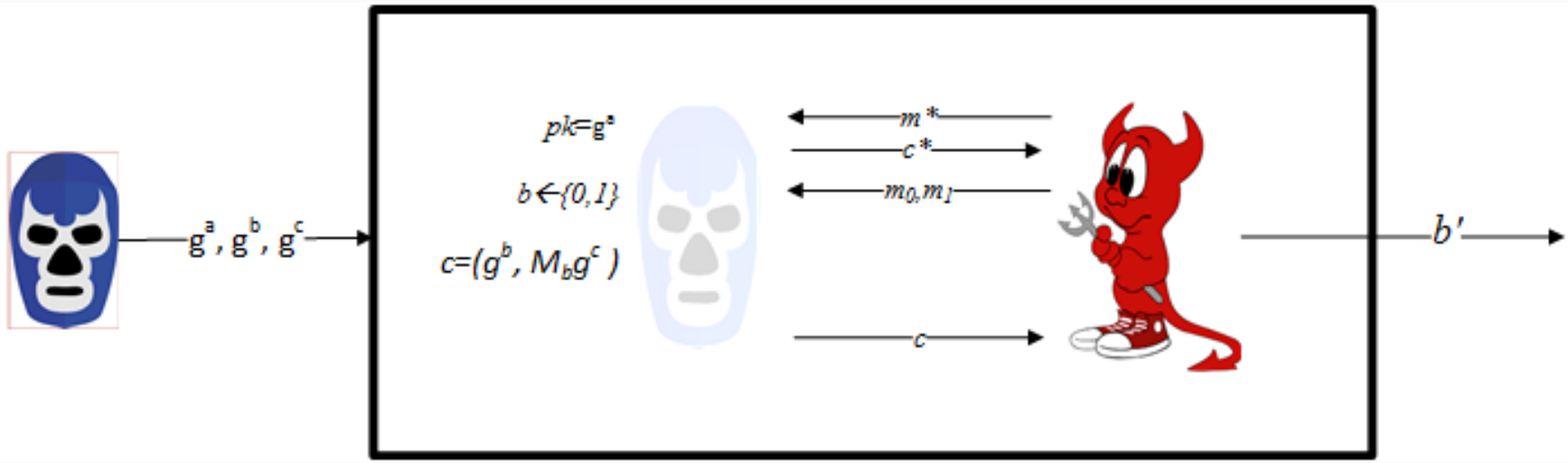
Απόδειξη:

Έστω ότι το ElGamal δεν διαθέτει ασφάλεια $\mathrm{IND\text{-}CPA}$.

Άρα $\exists\ \mathcal{A}$, ο οποίος μπορεί να νικήσει στο παιχνίδι CPA με μη αμελητέα πιθανότητα. Κατασκευή $\mathcal{B}$:

- Είσοδος: τριάδα στοιχείων
- Εσωτερικά: Προσομοίωση του $\mathcal{C}_{\mathrm{IND\text{-}CPA}}$ στο παιχνίδι CPA και χρήση $\mathcal{A}$ ως μαύρο κουτί
- Αποτέλεσμα: Διαχωρισμός DH - τυχαίας τριάδας με μη αμελητέα πιθανότητα

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης IND-CPA



Ασφάλεια Κρυπτογράφησης IND-CPA

- Είσοδος: g^α, g^β, g^c
- Στο CPA-GAME δημόσιο κλειδί $y = g^\alpha$
- Ο $\mathcal{B}$ απαντά στις κρυπτογραφήσεις του $\mathcal{A}$ (προσομοιώνει $\mathcal{C}_{\text{IND-CPA}}$)
- Όταν ο $\mathcal{A}$ προκαλέσει με δύο μηνύματα m_0, m_1
  - ο $\mathcal{C}_{\text{IND-CPA}}$ διαλέγει ομοιόμορφα bit $b \in_R \{0, 1\}$,
  - κρυπτογραφεί το m_b με τυχαιότητα το g^β και πολλαπλασιάζει με g^c
  - Τελικά στέλνει το: $(g^\beta, m_b \cdot g^c)$
- Ο $\mathcal{A}$ επιστρέφει την τιμή b^*
- Ο $\mathcal{B}$ εξάγει το b^*

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης - IND-CPA

Ανάλυση

- Για τριάδα DH: $g^c = (g^\alpha)^\beta = y^\beta$
  - ο $\mathcal{A}$ θα λάβει ένα έγκυρο κρυπτοκείμενο ElGamal.
  - Η πιθανότητα να μαντέψει σωστά είναι τουλάχιστον: $1/2 + \text{non-negl}(\lambda)$.
- Για τυχαία τριάδα: ο $\mathcal{A}$ θα πρέπει να μαντέψει τυχαία - αφού η κρυπτογράφηση δεν είναι σωστή.
- Πιθανότητα επιτυχίας: $\frac{1}{2}$.
- Άρα πλεονέκτημα $\mathcal{B}$:
  $\Pr\left[\mathcal{B}(g^a, g^b, g^{ab}) = 1\right] - \Pr\left[\mathcal{B}(g^a, g^b, g^c) = 1\right] \geq \text{non-negl}(\lambda)$
- Συμπέρασμα: Ο $\mathcal{B}$ μπορεί να ξεχωρίσει μία DH τριάδα από μία τυχαία με μη αμελητέα πιθανότητα.
- ΑΤΟΠΟ, αν ισχύει η υπόθεση DDH στο $\mathbb{G}$

Ομομορφικές Ιδιότητες

Πολλαπλασιαστικός Ομομορφισμός

$$\begin{aligned}
\mathsf{Enc}_y(r_1, m_1) \cdot \mathsf{Enc}_y(r_2, m_2) &= \\
(g^{r_1}, m_1 y^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, m_2 y^{r_2}) &= \\
(g^{r_1+r_2}, (m_1 \cdot m_2) \cdot y^{r_1+r_2}) &= \\
\mathsf{Enc}_y(r_1 + r_2, m_1 m_2)
\end{aligned}$$

Ομομορφικές Ιδιότητες

Reencryption

$$\begin{aligned}\mathrm{Enc}_y(r_1, m) \cdot \mathrm{Enc}_y(r_2, 1) = \\ (g^{r_1}, my^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, y^{r_1}) = \\ (g^{r_1+r_2}, my^{r_1+r_2}) = \\ \mathrm{Enc}_y(r_1 + r_2, m)\end{aligned}$$

Αλλαγή της τυχαιότητας - Αλλαγή της μορφής του μηνύματος
...χωρίς γνώση του ιδιωτικού κλειδιού
Malleability

Ομομορφικές Ιδιότητες

Προσθετικός Ομομορφισμός - Εκθετικό ElGamal
Κρυπτογράφηση του g^m αντί για m: $\text{Enc}_y(r, m) = (g^r, g^m y^r)$

$$\text{Enc}_y(r_1, m_1) \cdot \text{Enc}_y(r_2, m_2) =$$
$$(g^{r_1}, g^{m_1} y^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, g^{m_2} y^{r_2}) =$$
$$(g^{r_1+r_2}, g^{m_1+m_2} \cdot y^{r_1+r_2}) =$$
$$\text{Enc}_y(r_1 + r_2, (m_1 + m_2))$$

Αποκρυπτογράφηση: Λαμβάνουμε το g^m

Επίλυση διακριτού λογαρίθμου

Δεν αποτελεί πρόβλημα για κάποιες εφαρμογές

πχ. e-voting: Το m είναι το άθροισμα των ψήφων για κάποιο υποψήφιο $|m| << |q|$

Ασφάλεια σε επιθέσεις CCA

Το ElGamal δεν διαθέτει CCA-security

Έστω ότι ο $\mathcal{A}$ μπορεί να αποκρυπτογραφήσει μηνύματα επιλογής του, εκτός του c.

- Στόχος: Αποκρυπτογράφηση του $c = (G, M) = (g^r, m_b \cdot y^r)$
- Κατασκευή $c' = (G', M') = (G \cdot g^{r'}, M \cdot a y^{r'}) = (g^{r+r'}, a \cdot m_b \cdot y^{r+r'})$, όπου $a \in \mathbb{G}$ επιλέγεται από τον $\mathcal{A}$
- Η αποκρυπτογράφηση του c' ($\frac{M'}{G'^x}$) δίνει το $a \cdot m_b$ και κατά συνέπεια το m_b
- Αν $m_b = m_0$ επιστρέφει $b^* = 0$ αλλιώς επιστρέφει $b^* = 1$

Cramer-Shoup cryptosystem

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem

- Ronald Cramer, Victor Shoup, Crypto 1998
- Επέκταση του ElGamal
- Χρήση συνάρτησης σύνοψης H (υπάρχουν εκδόσεις και χωρίς)
- Αν ισχύει η υπόθεση DDH στο $\mathbb{G}$, τότε παρέχει ασφάλεια $\mathrm{IND\text{-}CCA2}$

Δημιουργία Κλειδιών

- Επιλογή πρώτων p, q με $p = 2q + 1$
- $\mathbb{G}$ ειναι η υποομάδα ταξης q στο $\mathbb{Z}_p^*$
- Επιλογή random generators g_1, g_2
- Επιλογή τυχαίων στοιχείων $x_1, x_2, y_1, y_2, z \in \mathbb{Z}_q$
- Υπολογισμός
  - $c = g_1^{x_1} g_2^{x_2}$
  - $d = g_1^{y_1} g_2^{y_2}$
  - $h = g_1^z$
- Δημόσιο Κλειδί: (c, d, h)
- Μυστικό Κλειδί: (x_1, x_2, y_1, y_2, z)

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem

Κρυπτογράφηση

- Κωδικοποίηση μηνύματος m στο $\mathbb{G}$
- Επιλογή $r \in_R \mathbb{Z}_q$
- Υπολογισμός
  - $u_1 = g_1^r, u_2 = g_2^r$
  - $e = mh^r$
  - $\alpha = \mathrm{H}(u_1||u_2||e)$
  - $v = c^r d^{r\alpha}$
- Κρυπτογράφημα: (u_1, u_2, e, v)

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem

Αποκρυπτογράφηση

- Υπολογισμός $\alpha = \mathrm{H}(u_1||u_2||e)$
- Έλεγχος αν $u_1^{x_1} u_2^{x_2} (u_1^{y_1} u_2^{y_2})^{\alpha} = v$. Σε περίπτωση αποτυχίας έξοδος χωρίς αποκρυπτογράφηση
- Σε περίπτωση επιτυχίας υπολογισμός $m = \frac{e}{u_1^z}$

ElGamal CCA2: Cramer-Shoup cryptosystem

Ορθότητα

- $u_1^{x_1} u_2^{x_2} \cdot (u_1^{y_1} u_2^{y_2})^{\alpha} = (g_1^{x_1} g_2^{x_2})^{r} \cdot (g_1^{y_1} g_2^{y_2})^{r\alpha} = c^r d^{r\alpha} = v$
- $\frac{e}{u_1^z} = \frac{mh^r}{u_1^z} = m \cdot \frac{g_1^{zr}}{g_1^{rz}} = m$

Παρατηρήσεις

- h, z αντιστοιχούν σε δημόσιο - ιδιωτικό κλειδί ElGamal
- u_1, e αντιστοιχούν στο κρυπτογράφημα του ElGamal
- u_2, v λειτουργούν ως έλεγχος ακεραιότητας, ώστε να μπορεί να αποφευχθεί το malleability
- Διπλάσια πολυπλοκότητα από ElGamal τόσο σε μέγεθος κρυπτοκειμένου, όσο και σε υπολογιστικές απαιτήσεις

DLP-based Commitment Schemes

Coin Flipping over the telephone

Manuel Blum (1981)

- Η Alice και ο Bob διαφωνούν (τηλεφωνικά) για το πού θα πάνε
- Αποφασίζουν να ρίξουν δύο νομίσματα (απομακρυσμένα)
- Ίδιο αποτέλεσμα: διαλέγει η Alice
- Διαφορετικό Αποτέλεσμα: διαλέγει ο Bob
- Προβλήματα;

Commitment Schemes

- Σύνταξη
  - $\mathsf{ck} \leftarrow \mathsf{KGen}(1^\lambda)$
    Δημιουργία δημόσιου commitment key ck
  - $(c, o) := \mathsf{Commit}_{\mathsf{ck}}(m)$
    Δέσμευση στο m με το ck και παραγωγή τιμής ανοίγματος o
  - $\{0, 1\} := \mathsf{Open}_{\mathsf{ck}}(c, o, m)$
    Επαληθεύει αν η δέσμευση c αντιστοιχεί στο m
- Ιδιότητες
  - **Hiding** - Προστατεύει αποστολέα - καθώς δεν μπορεί να διαρρεύσει το μήνυμά του
  - **Binding** - Προστατεύει παραλήπτη - καθώς ο αποστολέας δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή του εκ των υστέρων
- opening key = randomization για προστασία από brute-force επιθέσεις

Coin Flipping over the telephone με commitment schemes

- Η Alice ρίχνει το νόμισμα και αποκτά b_A
- Ο Bob ρίχνει το νόμισμα και αποκτά b_B
- Η Alice δεσμεύεται στο b_A: $(c_A, o_A) = \mathsf{Commit}_{\mathsf{ck}}(b_A)$
- Η Alice στέλνει c_A
- Ο Bob στέλνει b_B
- Η Alice στέλνει b_A, o_A
- Ο Bob επαληθεύει αν $\mathsf{Open}_{\mathsf{ck}}(c_A, o_A, b_A) = 1$
- Αποφασίζουν ανάλογα με το αν $b_A = b_B$
- Προβλήματα (ξανά);

Pedersen commitment

- Επιλογή ομάδας με δύσκολο DLP από TTP (trusted setup)
  - Επιλογή πρώτου p ώστε $p = 2q + 1$ πρώτος
  - $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ υπομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$
  - Επιλογή τυχαίου h (ή $x \in \mathbb{Z}_q$ και $h = g^x$)
  - Δημοσιοποίηση $g, \mathbb{G}, p, q, h$
- Δέσμευση:
  $c = \text{Commit}(m, r) = g^m \cdot h^r \bmod p$
- Αποκάλυψη:
  Αποστολή m, r
- Επαλήθευση:
  $c =_? g^m \cdot h^r$

Ομομορφικές Ιδιότητες

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot c_2 &= \mathsf{Commit}(m_1, r_1) \cdot \mathsf{Commit}(m_2, r_2) \\
&= (g^{m_1} \cdot h^{r_1}) \cdot (g^{m_2} \cdot h^{r_2}) \\
&= g^{m_1+m_2} \cdot h^{r_1+r_2} \\
&= \mathsf{Commit}(m_1 + m_2, r_1 + r_2)
\end{aligned}
$$

Ασφάλεια - Information Theoretically Hiding

$c = g^m \cdot h^r = g^{m+xr} \pmod{p}$

Ακόμα και ένας παντοδύναμος αντίπαλος να μπορεί να λύσει το DLP θα έχει μία εξίσωση της μορφής

$d = m + xr \pmod{q}$

2 άγνωστοι (m, r) - 1 εξίσωση

Για κάθε m υπάρχει r που την επαληθεύει

Ασφάλεια - Computationally Binding

Αν το DLP είναι δύσκολο τότε το σχήμα δέσμευσης είναι binding
Έστω $c = \text{Commit}(m, r) = \text{Commit}(m', r')$ με $m \neq m'$

$$
\begin{aligned}
g^m \cdot h^r = g^{m'} \cdot h^{r'} &\Rightarrow \\
g^{m+xr} = g^{m'+xr'} &\Rightarrow \\
m + xr = m' + xr' \pmod{q} &\Rightarrow \\
x = \frac{m' - m}{r - r'}
\end{aligned}
$$

ΑΤΟΠΟ

DLP-based collision resistance

Συμβατότητα ιδιοτήτων

Θεώρημα
Ένα σχήμα δέσμευσης δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα perfectly binding και perfectly hiding.

Απόδειξη (Διαισθητικά)
Αν ειναι perfectly hiding τότε $\forall c$ υπάρχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά m που παράγουν το ίδιο c.

Άρα ο αντίπαλος του binding (unbounded επίσης) θα μπορούσε να τα βρει και έτσι να αλλάξει το μήνυμα στο οποίο έχει κάνει commit.

και αντίστροφα...

Secret Sharing - Threshold Cryptosystems

Διαμοιρασμός απορρήτων - Εισαγωγή

Το πρόβλημα

Κλειδιά: κρίσιμα κρυπτογραφικά δεδομένα (όχι τα μόνα)

Για παράδειγμα: ιδιωτικό κλειδί

- Δύναμη αποκρυπτογράφησης
- Δύναμη υπογραφής

Λύση

Δεν θέλουμε να είναι στην φυσική κατοχή μίας οντότητας (μόνο)

Βασικό συστατικό Secure Multi Party Computation

Additive secret sharing

Έστω $(\mathbb{G}, +)$ μια ομάδα και $s \in \mathbb{G}$ το μυστικό το οποίο θέλουμε να μοιράσουμε σε n παίκτες

- Διαλέγουμε ομοιόμορφα $s_1, \cdots s_{n-1} \in_R \mathbb{G}$
- Θέτουμε $s_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} s_i$
- Μοιράζουμε τα $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ στους παίκτες
- Ανακατασκευή $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$

Παραλλαγή: Αν $s \in \{0,1\}^l$ τότε υλοποίηση με XOR
$s_n = s \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n-1} s_i)$

Ασφάλεια: Κανένα υποσύνολο από $n-1$ παίκτες δεν μπορεί να ανακατασκευάσει το s

Πρόβλημα: Ένας παίκτης μπορεί να ακυρώσει την ανακατασκευή

Threshold Secret Sharing

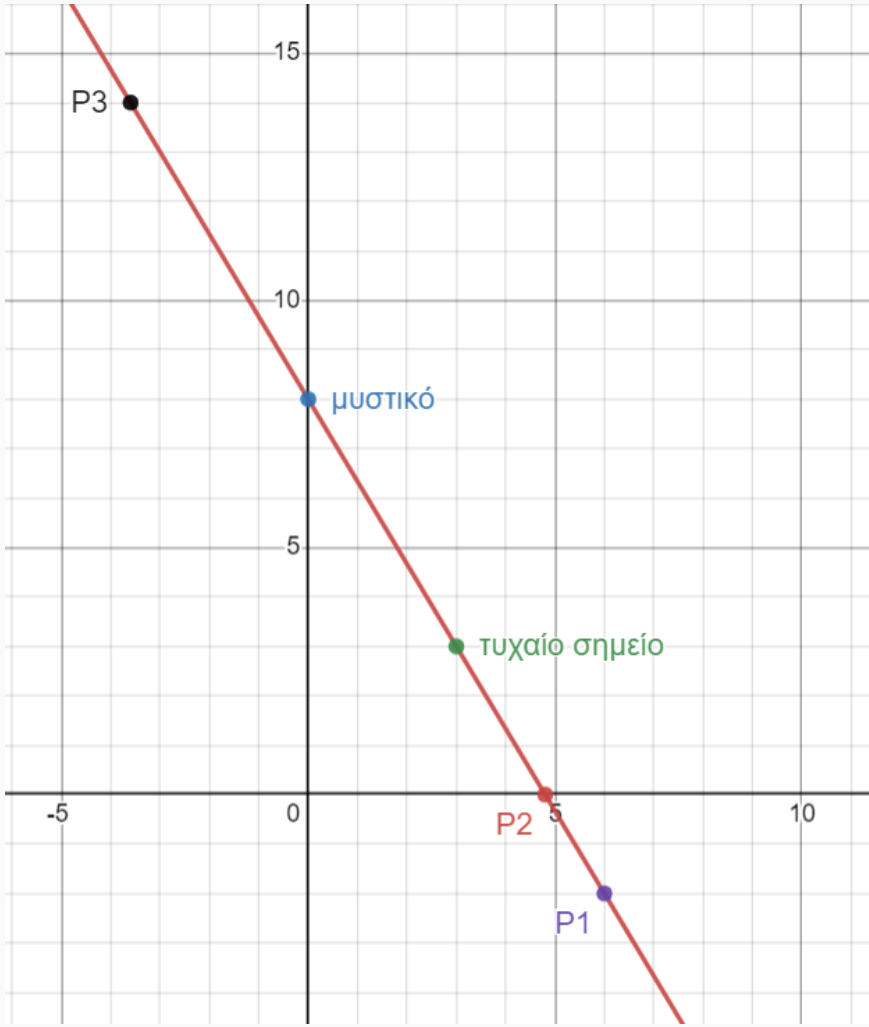
Παραλλαγή για ευελιξία: (t, n) threshold secret sharing

- Ένα μυστικό s πρέπει να μοιραστεί σε n παίκτες $P_1, P_2, \cdots P_n$ ώστε:
  - Οποιοδήποτε υποσύνολο από τουλάχιστον t παίκτες να μπορεί να το ανακτήσει
  - Κανένα υποσύνολο με $t-1$ παίκτες να μην μπορεί
- Υπόθεση Εμπιστευόμαστε τον διανομέα D και τους παίκτες

Λύση: Shamir secret sharing - Βασίζεται σε πολυώνυμα σε πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_p$ με $s \in \mathbb{F}_p, |\mathbb{F}_p| > n, p$ πρώτος

Διαισθητικά...

- Από 2 σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ διέρχεται μοναδική ευθεία
- Από 1 σημείο (x_1, y_1) διέρχονται άπειρες
- Το 1 σημείο είναι το $(0, s)$
- Διαλέγω το 2 τυχαία
- Ορίσαμε μια ευθεία
- Μοιράζω σημεία της στους διαφορους παίκτες
- Οποιοιδήποτε 2 μπορούν να ανακατασκευάσουν την ευθεία και να ανακτήσουν το μυστικό.
- Κανένας παίκτης μόνος του δεν μπορεί



Πολυωνυμική παρεμβολή

- Έστω ένα πολυώνυμο βαθμού $t-1$:
  $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{t-1} x^{t-1}$
- Μπορεί να ανακατασκευαστεί από t σημεία $(x_i, p(x_i))$ με διαφορετικές τετμημένες (με μοναδικό τρόπο)
- Υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα βαθμού t που περνούν από t σημεία
- Υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $t-1$ που περνά από t σημεία
- Κατασκευή με συντελεστές Lagrange
- $\lambda_i(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{t} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$
- Προκύπτει το
  $L(x) = \sum_{i=1}^{t} p(x_i)\lambda_i(x) = p(x_1)\lambda_1(x) + \cdots + p(x_t)\lambda_t(x)$

Shamir secret sharing: Διανομή

Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε έναν έμπιστο διανομέα:

- Επιλέγει και δημοσιοποιεί ένα πρώτο p
- Επιλέγει $t-1$ συντελεστές ενός πολυωνύμου βαθμού t $\{a_{t-1}, \cdots, a_1\} \in_R \mathbb{Z}_p$
- Θέτει ως σταθερό όρο το μυστικό s
- Προκύπτει το πολυώνυμο $p(x) = a_{t-1} \cdot x^{t-1} + \cdots + a_1 \cdot x + s \pmod{p}$
- $p(0) = s$
- Μοιράζει στον παίκτη i την τιμή $(i, p(i))$ (ή $(x_i, p(x_i)), x_i \in_R \mathbb{Z}_p$)

Shamir secret sharing: Ανακατασκευή

- Παρατήρηση: Δεν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το πολυώνυμο p αλλά το μυστικό $p(0) = s$
- Κάθε παίκτης i υπολογίζει τους συντελεστές Lagrange
- $\lambda_i(0) = \prod_{k=1,k\neq i}^{t} \frac{-k}{i-k} \bmod p$
- t παίκτες μπορούν να υπολογίσουν το $p(0)$ ως: $\sum_{i=1}^{t} p(i)\lambda_i(0) \bmod p$

Παρατηρήσεις I

- Πληροφοριοθεωρητική ασφάλεια αν ο αντίπαλος διαθέτει λιγότερα μερίδια
- Μπορούν να προστεθούν εύκολα καινούρια μερίδια, χωρίς να αλλάξουν τα παλιά: Υπολογισμός νέων σημείων
- Εύκολη αντικατάσταση μεριδίων: Υπολογισμός νέων σημείων (πρέπει να γίνει ασφαλής καταστροφή των παλιών)
- Σημαντικοί παίκτες: περισσότερα από ένα μερίδια
- Αλλαγή Μεριδίων: Τροποποίηση πολυωνύμου χωρίς να αλλάξει το μυστικό
- Ομομορφικές ιδιότητες (άθροισμα πολυωνύμων είναι πολυώνυμο)
  $s_1 + s_2 = f(0) + g(0) = (f + g)(0)$

Παρατηρήσεις II

- Μειονεκτήματα: Εμπιστοσύνη
  - Κακόβουλος διανομέας: Λανθασμένα μερίδια σε τμήμα των παικτών
  - Κακόβουλος παίκτης: Παροχή λανθασμένων μεριδίων κατά τη διάρκεια της ανακατασκευής
- Λύση: Συνδυασμός με σχήμα δέσμευσης (Verifiable Secret Sharing)
  - Ο διανομέας μαζί με τα μερίδια παρέχει και δεσμεύσεις για τους συντελεστές
  - Οι παίκτες επαληθεύουν ότι οι δεσμεύσεις δίνουν το σημείο τους

Feldman Verifiable Secret Sharing

Υποθέσεις

- Ομάδα $\mathbb{G}$ τάξης q με γεννήτορα g με δύσκολο DLP
- Υπολογιστικά περιορισμένος αντίπαλος
- Για απλότητα χρήση συνάρτησης σύνοψης H για δέσμευση
- Για ασφάλεια: Απαιτείται έντιμη πλειοψηφία (το πολύ $t-1$ corrupted / τουλάχιστον t honest)
  - Οποιοδήποτε σύνολο από t honest θα ανακατασκευάσει το μυστικό
  - Για έντιμο διανομέα: το μυστικό είναι το σωστό
  - Οι corrupted δεν μαθαίνουν τίποτα για το s

Feldman Verifiable Secret Sharing: Διαμοιρασμός s

Ο διανομέας:

- Επιλογή $a_0 \in_R \mathbb{Z}_q$
- Διαμοιρασμός του a_0 με Shamir Secret Sharing
  - Επιλογή $a_1, \cdots, a_{t-1} \in_R \mathbb{Z}_q$
  - Ορισμός $p(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{t-1} a_j \cdot x^j$
  - Αποστολή $s_i = p(i)$ στον P_i
- Broadcast: $\{A_j = g^{a_j}\}_{j=0}^{t-1}$ και
- $c = \mathrm{H}(a_0) \oplus s$

Feldman Verifiable Secret Sharing: Φάση επαλήθευσης

- Κάθε παίκτης P_i υπολογίζει:

$$c_i = \prod_{j=0}^{t-1} (A_j)^{i^j} = \prod_{j=0}^{t-1} (g^{a_j})^{i^j} = \prod_{j=0}^{t-1} g^{a_j \cdot i^j} = g^{\sum_{j=0}^{t-1} a_j \cdot i^j} = g^{p(i)}$$

- Αν ο διανομέας είναι έμπιστος θα ισχύει: $c_i = g^{p(i)} = g^{s_i}$
- Επαλήθευση σχέσης: Αν δεν ισχύει ο P_i τερματίζει ανεπιτυχώς
- Αν τερματίσουν πάνω από t χρήστες, ο διανομέας δεν είναι έμπιστος: τερματισμός
- Αν τερματίσουν λιγότεροι από t χρήστες: Φταίει ο P_i - επανάληψη s_i

Feldman Verifiable Secret Sharing: Φάση ανακατασκευής

- Συγκέντρωση τουλάχιστον t μεριδίων - υπολογισμός a_0
- Υπολογισμός $s = \mathrm{H}(a_0) \oplus c$

Εφαρμογή: Threshold ElGamal I

- Δημιουργία Κλειδιών από (trusted) dealer
- Οι παίκτες είναι 'αρχές' που συνεργάζονται στην αποκρυπτογράφηση
  - Επιλογή δύο μεγάλων πρώτων p, q ώστε $q \mid (p-1)$
  - Επιλογή της υποομάδας τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$ και γεννήτορα g
  - Επιλογή τυχαίου $x \in \mathbb{Z}_q$
  - Κανονικός υπολογισμός δημοσίου κλειδιού $y = g^x \bmod p$
  - Χρήση σχήματος Shamir για διαμοιρασμό του ιδιωτικού x $(\bmod\ q)$
  - Αποτέλεσμα: Δημόσιο κλειδί και μερίδια $\mathsf{KGen}(1^\lambda) = (y, \{i, p(i)\}_{i=1}^n)$
- Κρυπτογράφηση
  - Κανονικά $\mathsf{Enc}(y, m) = (G, M) = (g^r, m \cdot y^r)$

Εφαρμογή: Threshold ElGamal II

- Αποκρυπτογράφηση: Σε δύο βήματα
  1. **'Αποκρυπτογράφηση' μεριδίων**
     - Κάθε παίκτης υπολογίζει και δημοσιοποιεί το $c_i = G^{p(i)} \bmod p$
  2. **Συνδυασμός**
     - Συγκεντρώνονται t 'αποκρυπτογραφημένα' μερίδια (i, c_i) τα οποία συνδυάζονται ως:

$$C = \prod_i c_i^{\lambda_i(0)} = \prod_i G^{p(i)\lambda_i(0)} = G^{\sum_i p(i)\lambda_i(0))} = G^{p(0)} = G^x$$

     όπου λ_i οι συντελεστές Lagrange
     - Αποκρυπτογράφηση ως: $\frac{M}{C}$

Παρατηρήσεις

- Υπολογιστική ασφάλεια ως προς τα c_i
- Ίδια κρυπτογράφηση
- Αποκρυπτογράφηση χωρίς ανακατασκευή του ιδιωτικού κλειδιού (δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης)