Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 16/12/2024

Άσκηση 1: Παιχνίδι με Κάρτες (1.5 μον.)

Θεωρούμε το εξής παιχνίδι ανάμεσα σε δύο παίκτες, τον X και τον Y. Έχουμε μια ακολουθία n καρτών που είναι τοποθετημένες σε ένα τραπέζι, η μία δίπλα στην άλλη, σε μια νοητή ευθεία. Σε κάθε κάρτα i υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός a_i. Οι αριθμοί όλων των καρτών είναι ορατοί και στους δύο παίκτες. Οι παίκτες παίζουν με τη σειρά, πρώτα ο X, μετά ο Y, μετά πάλι ο X, κοκ. Στη σειρά του, κάθε παίκτης παίρνει είτε την *πρώτη* είτε την *τελευταία* κάρτα από αυτές που έχουν απομείνει στο τραπέζι (το "πρώτη" και το "τελευταία" αναφέρεται στις θέσεις των καρτών στην ευθεία, ο παίκτης πρέπει υποχρεωτικά να πάρει μία από τις δύο αυτές κάρτες). Το παιχνίδι ολοκληρώνεται όταν δεν έχει απομείνει καμία κάρτα στο τραπέζι.

Στόχος των παικτών είναι να μεγιστοποιήσουν το συνολικό τους κέρδος, δηλ. το άθροισμα των αριθμών στις κάρτες που έχουν συλλέξει στο τέλος του παιχνιδιού. Θεωρούμε ότι και οι δύο παίκτες ακολουθούν βέλτιστη στρατηγική, δηλ. επιλέγουν τις κάρτες που μεγιστοποιούν το κέρδους τους στο τέλος του παιχνιδιού, δεδομένου ότι ο άλλος παίκτης ακολουθεί και αυτός βέλτιστη στρατηγική.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συνολικό κέρδος των δύο παικτών στο τέλος του παιχνιδιού, δεδομένου ότι και οι δύο ακολουθούν βέλτιστη στρατηγική. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε $n = 5$ κάρτες με αριθμούς $(10, 6, 8, 1, 4)$ (οι κάρτες είναι τοποθετημένες με αυτή τη σειρά από αριστερά προς τα δεξιά). Αν ο X επιλέξει το 10, η βέλτιστη κίνηση για τον Y είναι να επιλέξει το 4 και η βέλτιστη κίνηση για τον X είναι να επιλέξει το 6 (δείτε ότι αν ο Y είχε επιλέξει το 6, αντί του 4, ο X θα είχε επιλέξει το 8 και αυτό δεν μεγιστοποιεί το κέρδος του Y). Τέλος, ο Y επιλέγει το 8 και ο X το 1, και εκεί ολοκληρώνεται το παιχνίδι. Το συνολικό κέρδος του X είναι $10 + 6 + 1 = 17$ και του Y είναι $4 + 8 = 12$. Δείτε ότι το συνολικό κέρδος που πέτυχαν είναι βέλτιστο, τόσο για τον X όσο και για τον Y, δεδομένο ότι ο αντίπαλος παίκτης ακολουθεί βέλτιστη στρατηγική.

Άσκηση 2: Ταξιδεύοντας στον Κόσμο (2 μον.)

Θεωρούμε *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G(V, E, \vec{c}, \vec{\tau})$ με n κορυφές, m ακμές και θετικά ακέραια κόστη $\vec{c}$ και $\vec{\tau}$ στις ακμές. Κάθε ακμή $e = \{x, y\} \in E$ δηλώνει ότι οι πόλεις x και y συνδέονται με αμφίδρομη σιδηροδρομική σύνδεση, το κόστος $c(e)$ δηλώνει την τιμή της ετήσιας κάρτας για απεριόριστες μετακινήσεις μεταξύ των πόλεων x και y, και το κόστος $\tau(e)$ δηλώνει την τιμή του εισιτηρίου για απλή μετάβαση μεταξύ των πόλεων x και y.

Σχεδιάζετε την αγορά ενός συνόλου ετήσιων καρτών με *ελάχιστο συνολικό κόστος*, οι οποίες επιτρέπουν απεριόριστες μετακινήσεις μεταξύ της πόλης s, όπου είναι το πατρικό σας, και της πόλης t, όπου σπουδάζετε. Η Χώρα των Αλγορίθμων έχει πυκνό σιδηροδρομικό δίκτυο. Έτσι υπάρχουν πολλά διαφορετικά τέτοια σύνολα ετήσιων καρτών με ελάχιστο συνολικό κόστος που προσφέρουν απεριόριστες μετακινήσεις μεταξύ των πόλεων s και t. Αποφασίζετε λοιπόν να αγοράσετε εκείνο το σύνολο καρτών που (εκτός από το κόστος αγοράς) ελαχιστοποιεί και το επιπλέον κόστος μετακίνησης (με εισιτήριο απλής μετάβασης) μεταξύ της πόλης a, όπου βρίσκεται η έδρα της αγαπημένης σας ομάδας, και της πόλης b, όπου πηγαίνετε συχνά για πεζοπορία και σκι. Με βάση τον κανονισμό της Εταιρείας Σιδηροδρόμων, για την μετακίνηση μεταξύ των πόλεων a και b, πληρώνετε τα εισιτήρια $\tau(e)$ μόνο για τις σιδηροδρομικές συνδέσεις e που δεν έχετε ετήσια κάρτα απεριόριστων μετακινήσεων.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός συντομότερου $s - t$ μονοπατιού, με βάση τα κόστη c, που επιπλέον ελαχιστοποιεί το κόστος εισιτηρίων τ για την μετακίνηση μεταξύ των πόλεων a και

b. Να εξηγήσετε προσεκτικά τα ενδιάμεσα βήματα του αλγορίθμου σας, αιτιολογώντας την ορθότητά του, και να αιτιολογήσετε την υπολογιστική του πολυπλοκότητα (είναι καλό ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας να μην ξεπερνάει σημαντικά τον χρόνο για τον υπολογισμό ενός συντομότερου $s-t$ μονοπατιού).

Άσκηση 3: Επίλυση Συστήματος Ανισοτήτων (2.5 μον.)

Έστω $x_1, \dots, x_n$ ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε ένα σύστημα S αποτελούμενο από m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \leq b_{ij}$, για κάποια $1 \leq i, j \leq n$, όπου τα b_{ij} είναι ακέραιοι αριθμοί. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες του S.

(α) Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για το αν το S είναι ικανοποιήσιμο (και να αποδείξετε την ορθότητα του κριτηρίου σας). Με βάση αυτό το κριτήριο, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που διαπιστώνει αν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι. Αν το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει αποδεκτές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(β) Να συμπληρώσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε αν το σύστημα S δεν είναι ικανοποιήσιμο, να υπολογίζει ένα ελάχιστο (ως προς το πλήθος ανισοτήτων) υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(γ) Θεωρούμε ότι κάθε ανισότητα $x_i - x_j \leq b_{ij}$ συνοδεύεται από ένα θετικό ακέραιο βάρος w_{ij}. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που αν το σύστημα S δεν είναι ικανοποιήσιμο, υπολογίζει ένα ελάχιστου συνολικού βάρους υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας; Είναι αυτή πολυωνυμική στο μέγεθος της εισόδου;

Άσκηση 4: Μετατροπή Ροής Ακμών σε Ροή Μονοπατιών (2 μον.)

Θεωρούμε $s-t$ δίκτυο $G(V, E, \vec{c})$ με n κορυφές, m ακμές, και θετική ακέραια χωρητικότητα $c(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Δίνεται μια (ακέραια) $s-t$ *ροή ακμών* $f : E \to \mathbb{N}$ που αναθέτει ακέραια ροή $f(e), 0 \leq f(e) \leq c(e)$, σε κάθε ακμή $e \in E$ του G (και εξασφαλίζει διατήρηση ροής σε κάθε ενδιάμεση κορυφή $v \in V \setminus \{s, t\}$).

Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των $s-t$ μονοπατιών στο G. Μια (ακέραια) *ροή μονοπατιών* $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ αναθέτει ακέραια ροή $g(p)$ σε κάθε $s-t$ μονοπάτι $p \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε $\sum_{p \in \mathcal{P}: e \in p} g(p) \leq c(e)$, για κάθε ακμή $e \in E$ (η διατήρηση ροής στις ενδιάμεσες κορυφές εξασφαλίζεται γιατί η g εκφράζεται ως ροή $s-t$ μονοπατιών).

Λέμε ότι μια $s-t$ ροή ακμών $f : E \to \mathbb{N}$ *αντιστοιχεί* σε μια $s-t$ ροή μονοπατιών $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$, αν $f(e) = \sum_{p \in \mathcal{P}: e \in p} g(p)$ για κάθε ακμή $e \in E$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος με είσοδο μια $s-t$ ροή ακμών $f : E \to \mathbb{N}$, υπολογίζει μια αντίστοιχη $s-t$ ροή μονοπατιών $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $g(p) > 0$ σε m το πολύ μονοπάτια $p \in \mathcal{P}$. Πως εξασφαλίζει ο αλγόριθμός σας τον τελευταίο περιορισμό και ποια είναι η υπολογιστική του πολυπλοκότητα;

Άσκηση 5: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Μέγιστης Ροής (2+1 μον.)

Θεωρούμε $s-t$ δίκτυο $G(V, E, \vec{c})$ με n κορυφές, m ακμές, και θετική ακέραια χωρητικότητα $c(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας.

1. Δίνεται ροή f που (υποτίθεται ότι) αποτελεί μέγιστη $s-t$ ροή στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη $s-t$ ροή στο G.
2. Έστω ότι διαπιστώνουμε ότι η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη $s-t$ ροή στο G, αλλά στη συνέχεια ανακαλύπτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα $c'(e)$ μια ακμής e είναι μικρότερη κατά $k \geq 1$ μονάδες από τη χωρητικότητα $c(e)$ που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που (αν χρειάζεται) τροποποιεί την f σε μία μέγιστη $s-t$ ροή f' για το δίκτυο G', το οποίο προκύπτει από το G θέτοντας $c'(e) = c(e) - k$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού της f' από την αρχή.

3. **(1 μον. bonus)** Λόγω μιας φυσικής καταστροφής, πρέπει να διακόψουμε προσωρινά τη λειτουργία του δικτύου. Επειδή όμως η πλήρης διακοπή της ροής από το s στο t θα προκαλούσε την καταστροφή των αγωγών / ακμών του δικτύου, χρειάζεται να διατηρήσουμε μια ελάχιστη ροή $\ell(e)$ σε κάθε ακμή e. Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την ελάχιστη ροή g για την οποία ισχύει ότι $\ell(e) \leq g(e) \leq (e)$ σε κάθε ακμή e. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο ένα $s-t$ δίκτυο $G(V, E, \vec{c}, \vec{\ell})$, όπου $c(e) \in \mathbb{N}$ είναι η μέγιστη και $\ell(e) \in \mathbb{N}$ είναι η ελάχιστη ροή που επιτρέπουμε σε κάθε ακμή, υπολογίζει μια ελάχιστη $s-t$ ροή g.
   Αν σας διευκολύνει, μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένη τη μέγιστη ροή f στο αρχικό δίκτυο $G(V, E, \vec{c})$ και ότι $f(e) \geq \ell(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Πως αλλάζει ο ορισμός του υπολειμματικού δικτύου και ποιος είναι τώρα ο ρόλος των "επαυξητικών" μονοπατιών;
   Να προσπαθήσετε να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Να διατυπώσετε συνοπτικά το επιχείρημα που εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι μια ελάχιστη $s-t$ ροή που σέβεται τους περιορισμούς χωρητικότητας.