

Υπολογιστική Θεωρία Αριθμών και Κρυπτογραφία

Εισαγωγή στη Θεωρία Αριθμών

Αρης Παγουρτζής – Στάθης Ζάχος

Διαιρετότητα

Ορισμός

Για $a, b \in \mathbb{Z}$ θα λέμε ότι ο “ a διαιρεί τον b ”, συμβολικά $a \mid b$, αν υπάρχει $c \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $b = ca$.

Θα λέμε ότι ο a δεν διαιρεί τον b , συμβολικά $a \nmid b$, αν $\forall c \in \mathbb{Z}$, $b \neq ca$.

Ιδιότητες

Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1. $a \mid a, 1 \mid a, a \mid 0$.
2. $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$.
3. $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$.
4. $a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = \pm b$.
5. $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$.
6. $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (xb + yc) \forall x, y \in \mathbb{Z}$.
7. $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ και $a \mid b \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \leq b$.

Η διαιρετότητα είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο \mathbb{N} .

Ορολογία

- ▶ a γνήσιος διαιρέτης του b : $a \mid b$ και $0 < a < |b|$.
- ▶ a μη τετριμμένος διαιρέτης του b : $a \mid b$ και $1 < a < |b|$.
- ▶ $p > 1$ πρώτος αριθμός: μοναδικοί διαιρέτες του 0 , 1 και p .
- ▶ p, q σχετικά πρώτοι (coprime): μοναδικός κοινός διαιρέτης 0 , 1 .

Ακέραια διαίρεση

Θεώρημα (Ακέραιας Διαίρεσης)

Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$ με $b > 0$ υπάρχουν μοναδικά q (quotient, πηλίκο), r (remainder, υπόλοιπο) ($q, r \in \mathbb{Z}$) τέτοια ώστε:

$$a = qb + r \quad \text{και} \quad 0 \leq r < b$$

Απόδειξη

Έστω το σύνολο $S = \{a - xb \mid x \in \mathbb{Z}, a - xb \geq 0\}$.

- ▶ $S \neq \emptyset$ (π.χ. $a - (-|a|b) \in S$) συνεπώς έχει ελάχιστο στοιχείο $r < b$ (γιατί;). Υπάρχει επομένως $q \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$a - qb = r \Rightarrow a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

- ▶ Έστω $q', r' \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$a = q'b + r', \quad 0 \leq r' < b, \text{ επομένως } 0 \leq |r' - r| < b.$$

- ▶ $qb + r = q'b + r' \Rightarrow (q - q')b = (r' - r) \Rightarrow |q - q'|b = |r' - r|$.

Αν $q \neq q'$ τότε $b \leq |r' - r|$, άτοπο. Συνεπώς $q = q'$ και $r = r'$. \square

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Greatest Common Divisor)

Θεώρημα (ΜΚΔ)

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ και $d = \min \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb \geq 0\}$. Τότε:

(i) $d \mid a$ και $d \mid b$.

(ii) $d' \mid a \wedge d' \mid b \Rightarrow d' \leq d$.

Απόδειξη

► (i) Έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $d = \kappa a + \lambda b$. Θ.δ.ο. $d \mid a$.

Έστω $d \nmid a$. Τότε υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$a = qd + r, \quad 0 < r < d,$$

$$\Rightarrow r = a - qd = a - q(\kappa a + \lambda b) = (1 - q\kappa)a + (-\lambda q)b$$

οπότε $r \in \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb \geq 0\}$ και $r < d$, άτοπο.

Όμοια δείχνουμε $d \mid b$.

► (ii) Έστω d' τέτοιο ώστε $d' \mid a$ και $d' \mid b$. Τότε $a = c_1 d', b = c_2 d'$.

Επομένως:

$$d = \kappa c_1 d' + \lambda c_2 d' \Rightarrow d' \mid d \Rightarrow d' \leq d.$$

ΜΚΔ: χρήσιμες ιδιότητες

Σαν πορίσματα του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτουν τα παρακάτω:

- ▶ ο **αλγόριθμος του Ευκλείδη** βρίσκει τον ΜΚΔ δύο ακεραίων αριθμών (βλ. παρακάτω).
- ▶ $\gcd(a, b) = 1 \Rightarrow \exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \kappa a + \lambda b = 1$
(χρήση σε εύρεση αντιστρόφου *modulo* b : $\kappa a \bmod b = 1$).
- ▶ Αν $c \mid ab \wedge \gcd(a, c) = 1$ τότε $c \mid b$:
 $\gcd(a, c) = 1 \Rightarrow \exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} : \kappa c + \lambda a = 1 \Rightarrow \kappa c b + \lambda a b = b \Rightarrow c \mid b$.
- ▶ Αν p πρώτος $\wedge p \mid ab$ τότε $p \mid a \vee p \mid b$:
Αν $\gcd(p, a) = p$ τότε $p \mid a$. Αν $\gcd(p, a) = 1$, αφού $p \mid ab$ θα πρέπει $p \mid b$.

Κάθε ακέραιος αριθμός $n > 1$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως πεπερασμένο γινόμενο πρώτων αριθμών.

- ▶ Απόδειξη ύπαρξης: με τη μέθοδο της επαγωγής.
- ▶ Απόδειξη μοναδικότητας: στηρίζεται στην ιδιότητα “αν p πρώτος $\wedge p \mid ab$ τότε $p \mid a \vee p \mid b$ ” σε συνδυασμό με χρήση επαγωγής.

Άσκηση: συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

Παραδείγματα

- ▶ $2, 3, 5, \dots, 1997, \dots, 6469, \dots$
- ▶ $(333 + 10^{793})10^{791} + 1$ (με 1585 ψηφία, παλίνδρομος βρέθηκε το 1987 από τον H. Dubner)
- ▶ $2^{1257787} - 1$ (με 378632 ψηφία βρέθηκε το 1996)
- ▶ $2^{13466917} - 1$ (με 4053946 ψηφία βρέθηκε το 2001)
- ▶ $2^{43112609} - 1$ (με 12978189 ψηφία βρέθηκε το 2008)
- ▶(2013, 2016, 2017)
- ▶ $2^{82589933} - 1$ (με 24862048 ψηφία βρέθηκε το 2018)

Θεώρημα (Ευκλείδη)

Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος.

Απόδειξη. Εστω ότι οι πρώτοι είναι πεπερασμένοι σε πλήθος,

συγκεκριμένα p_1, p_2, \dots, p_n . Τότε ο αριθμός $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ δε διαιρείται από κανένα πρώτο παρά μόνο από το 1 και τον εαυτό του

Αλγόριθμος Ευκλείδη

```
function gcd(a,b: integer);  
    if  $b = 0$  then gcd  $\leftarrow a$  else gcd  $\leftarrow$  gcd( $b, a \bmod b,$ )
```

Θεώρημα (ορθότητα Ευκλείδειου αλγορίθμου)

ο αλγόριθμος του Ευκλείδη βρίσκει τον ΜΚΔ δύο ακεραίων αριθμών.

Απόδειξη

- ▶ Βρίσκει διαιρέτη: αν $a, b > 0 \in \mathbb{Z}$ τότε $\text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(b, a \bmod b)$.
- ▶ Ο διαιρέτης που βρίσκει μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των a, b (γιατί;).
- ▶ Επομένως είναι ο ΜΚΔ.

Αλγόριθμος Ευκλείδη

$$\begin{array}{rcl} 1742 & = & 3 \cdot 494 + 260 \\ 494 & = & 1 \cdot 260 + 234 \\ 260 & = & 1 \cdot 234 + 26 \\ 234 & = & 9 \cdot 26 + 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 132 & = & 3 \cdot 35 + 27 \\ 35 & = & 1 \cdot 27 + 8 \\ 27 & = & 3 \cdot 8 + 3 \\ 8 & = & 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 & = & 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 & = & 2 \cdot 1 + 0 \end{array}$$

$$\gcd(1742, 494) = 26, \quad \gcd(132, 35) = 1.$$

- ▶ Χρόνος εκτέλεσης: $O(\log a)$ διαιρέσεις, $O(\log^3 a)$ bit operations (υποθέτοντας $a \geq b$).
- ▶ Τα κ, λ τ.ώ. $d = \kappa a + \lambda b$ μπορούν να υπολογιστούν στον ίδιο χρόνο: **επεκτεταμένος αλγόριθμος Ευκλείδη**.
- ▶ Χρήσεις: υπολογισμός αντιστρόφων modulo n , επίλυση γραμμικών ισοτιμιών, κρυπτογραφία δημοσίου κλειδιού (RSA, El Gamal, κ.ά.).

Συνάρτηση ϕ του Euler

Ορισμός

$\phi(n)$ είναι το πλήθος των αριθμών από το 1 μέχρι και n που είναι σχετικά πρώτοι με τον n .

Υπενθύμιση: m, n **σχετικά πρώτοι (coprime)**: μοναδικός κοινός διαιρέτης ο 1.

Ιδιότητες

- ▶ $\phi(p) = p - 1$ για p πρώτο.
- ▶ $\phi(p^a) = p^a(1 - \frac{1}{p})$ για p πρώτο.
- ▶ $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ για m, n σχετικά πρώτους.

Άσκηση: αποδείξτε το.

Παρατήρηση: για σύνθετο n , $\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$.

Σχέση ισοτιμίας (congruence)

- ▶ Η πράξη $\text{mod } m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, απεικονίζει το \mathbb{Z} στο $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$.
- ▶ Δύο αριθμοί a, b λέγονται *ισότιμοι modulo m* , συμβολικά $a \equiv b \pmod{m}$, αν έχουν την ίδια απεικόνιση με την πράξη $\text{mod } m$:
$$a \equiv b \pmod{m} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \text{ mod } m = b \text{ mod } m \Leftrightarrow m \mid (a - b)$$
- ▶ Άλλοι συμβολισμοί: $a = b \pmod{m}$, $a \equiv b (m)$, $a \equiv_m b$.
- ▶ Είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε κλάση C_k , $0 \leq k \leq m-1$, περιέχει τους ακραίους που αφήνουν υπόλοιπο k αν διαιρεθούν με το m .
- ▶ $\mathbb{Z}_m = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}\}$. Πιο απλά: $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$.

Πράξεις στο \mathbb{Z}_m

- ▶ Πρόσθεση: $C_k + C_j = C_{(k+j) \bmod m}$.
- ▶ Πολλαπλασιασμός: $C_k \cdot C_j = C_{kj \bmod m}$.
- ▶ Η απεικόνιση $' \bmod m' : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_m$ είναι **ομομορφισμός** (ακριβέστερα: **επιμορφισμός**).
- ▶ Πιο απλά:

$$(a + b) \bmod m = (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m ,$$
$$(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m .$$

- ▶ **Πρακτική σημασία:** αντί να κάνουμε τις πράξεις στο \mathbb{Z} και στο τέλος να βρίσκουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με m , μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις κατευθείαν στο \mathbb{Z}_m : σημαντική **μείωση χρόνου εκτέλεσης** σε πολλές περιπτώσεις.

Μικρό Θεώρημα Fermat

Θεώρημα (μικρό Fermat)

\forall prime p , $\forall a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Απόδειξη.

Για $a \in \mathbb{Z}$ με $p \nmid a$, τα στοιχεία

$$a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p-1)$$

είναι διαφορετικά ανά δύο στο \mathbb{Z}_p^* :

$$i \cdot a \equiv j \cdot a \pmod{p} \Rightarrow p \mid a(i-j) \Rightarrow p \mid (i-j) \Rightarrow i \equiv j \pmod{p}$$

Επομένως $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. \square

Παρόμοια αποδεικνύεται το πιο γενικό:

Θεώρημα (Euler)

$\forall a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Υψωση σε δύναμη modulo m

Επαναλαμβανόμενος Τετραγωνισμός (Repeated Squaring)

Είσοδος: $a, n, m \in \mathbb{Z}_+$

Έξοδος: $a^n \bmod m$

$x \leftarrow a \bmod m; y \leftarrow 1;$

while $n > 0$ **do**

if $n \bmod 2 \neq 0$ **then** $y \leftarrow y \cdot x \bmod m;$

$x \leftarrow x^2 \bmod m$

$n \leftarrow n \div 2$

end while

output y

Χρόνος εκτέλεσης: $O(\log n)$ επαναλήψεις, $O(\log n \log^2 m)$ bit operations.

▶ **Ομάδα (group):** ζεύγος $(G, *)$ τέτοιο ώστε:

▶ $\forall a, b \in G : a * b \in G$

▶ $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$

▶ $\exists e \in G, \forall a \in G : a * e = a$ (το e είναι μοναδικό)

▶ $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = e$

Αντιμεταθετική (Αβελιανή) ομάδα: επιπλέον $a * b = b * a$.

Το ζεύγος $(\mathbb{Z}_m, +)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.

▶ **Τάξη (order)** πεπερασμένης ομάδας: η πληθικότητά της.

▶ **Υποομάδα (subgroup):**

$$(S, *) \text{ υποομάδα της } (G, *) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S \subseteq G \wedge (S, *) \text{ ομάδα}$$

▶ **Πρόταση.** $(S, *)$ είναι υποομάδα της $(G, *)$ αν $S \subseteq G$ και S κλειστό ως προς $*$.

Η πολλαπλασιαστική ομάδα $(U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$

Πρόταση. $\gcd(a, m) = 1$ αν και μόνο αν $\exists c \in \mathbb{Z}_m$ τέτοιο ώστε $a \cdot c \equiv 1 \pmod{m}$.

Απόδειξη. (i) Ευθύ: με χρήση Θεωρ. ΜΚΔ.

(ii) Αντίστροφο: $\exists x \in \mathbb{Z}, ax \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow m \mid (ax - 1)$.

Αν $\gcd(a, m) = d > 1$ τότε $d \mid m \mid (ax - 1) \Rightarrow d \mid 1$, άτοπο.

Ορισμός

$U(\mathbb{Z}_m) = \{a \in \mathbb{Z}_m : \gcd(a, m) = 1\}$ είναι το σύνολο των σχετικά πρώτων με τον m , που λέγονται και **units του \mathbb{Z}_m** . Περιέχει ακριβώς τα στοιχεία του \mathbb{Z}_m που έχουν αντίστροφο modulo m .

Το $(U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα με πληθάρημο $\phi(m)$.

Για p πρώτο: $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_p^*$.

- ▶ Τάξη (order) στοιχείου

$$\text{τάξη } a \stackrel{\text{def}}{=} \min\{y \in \mathbb{N} : a^y = e\}$$

- ▶ Κυκλική ομάδα (cyclic group):

$$(G, *) \text{ κυκλική} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in (G, *) : \forall x \in G : \exists y \in \mathbb{N} : x = g^y$$

- ▶ Γεννήτορας (generator)

$$a \text{ γεννήτορας της } G \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{τάξη } a = |G|$$

Πρόταση: **μια ομάδα έχει γεννήτορα ανν είναι κυκλική.** Η τάξη της ομάδας ισούται με την τάξη του γεννήτορα.
(Άσκηση: αποδείξτε.)

Δακτύλιος (ring)

$(R, +, \cdot)$ δακτύλιος $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$(R, +)$ αντιμεταθετική ομάδα

(R, \cdot) μονοειδές (προσεταιριστική, ουδέτερο)

$\forall a, b, c \in R :$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b + a \cdot c)$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad (\text{επιμεριστική})$$

Το $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ είναι **αντιμεταθετικός δακτύλιος (commutative ring)**: η πράξη \cdot έχει επιπλέον την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Σώμα (field)

$(F, +, \cdot)$ σώμα $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$(F, +, \cdot)$ αντιμεταθετικός δακτύλιος

$(F \setminus \{e_+\}, \cdot)$ αντιμεταθετική ομάδα

Το $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, p πρώτος, είναι σώμα (και συμβολίζεται και $GF(p)$ ή \mathbb{F}_p).

Πρόταση. Κάθε σώμα τάξης p είναι ισομορφικό με το \mathbb{F}_p .

- ▶ Σύμπλοκο (coset): το σύνολο $H * a = \{h * a : h \in H, a \in G\}$ λέγεται δεξί σύμπλοκο (coset) της H στη G για υποομάδα H της $(G, *)$.
- ▶ Ομάδα πηλίκου (Quotient group) G/H : το σύνολο των συμπλόκων της H στην G
Το $(G/H, \otimes)$ είναι ομάδα με πράξη
 $(H * a) \otimes (H * b) = H * (a * b)$.

Θεώρημα Lagrange

Αν H είναι υποομάδα της πεπερασμένης ομάδας G τότε

$$|G| = |G/H| \cdot |H|$$

Απόδειξη. Στηρίζεται στο γεγονός ότι δύο σύμπλοκα ταυτίζονται ή είναι ξένα μεταξύ τους.

Πόρισμα (σημαντικό!): Η τάξη ενός στοιχείου μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας:

$$\forall a \in G : a^{|G|} = e$$

Περαιτέρω πορίσματα: **μικρό Θεώρημα Fermat** (ομάδα (\mathbb{Z}_p^*, \cdot)), **Θεώρημα Euler** (ομάδα $(U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$). Οι αποδείξεις τους χωρίς χρήση Θ. Lagrange προϋπήρχαν.

Κάθε ομάδα με τάξη πρώτο αριθμό είναι κυκλική (άρα έχει γεννήτορα).

Fermat (primality) test

Έλεγχος Fermat

Για να δούμε αν ένας δοσμένος ακέραιος n είναι πρώτος:

Επιλέγουμε τυχαία $a \in \mathbb{Z}_n$: αν $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ τότε n σύνθετος (με βεβαιότητα), αλλιώς λέμε ότι το n περνάει το test (ίσως είναι πρώτος). Στην δεύτερη περίπτωση επαναλαμβάνουμε.

Πρόταση

Αν για σύνθετο n υπάρχει ένας **μάρτυρας (witness)** (δηλ.

$a \in \mathbb{Z}_n$, $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$), τότε υπάρχουν τουλάχιστον $n/2$ μάρτυρες.

Απόδειξη. Χρήση Θ. Lagrange στην ομάδα των **μη μαρτύρων** του $U(\mathbb{Z}_n)$.

Πόρισμα: ο έλεγχος Fermat απαντάει σωστά με πολύ μεγάλη πιθανότητα για τους περισσότερους αριθμούς. Εξαιρούνται όμως οι **αριθμοί Carmichael**: σύνθετοι για τους οποίους δεν υπάρχει μάρτυρας Fermat. Για να καλύψουμε και αυτούς: **Miller-Rabin test** (αργότερα).

Πόρισμα του Θ. Lagrange

Αν $(S, *)$ υποομάδα της (πεπερασμένης) ομάδας $(G, *)$ και $S \neq G$ τότε:

$$|S| \leq |G|/2$$

Ισοτιμία σε $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow$ ισοτιμία σε \mathbb{Z}_{mn}

Πρόταση

Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\gcd(m, n) = 1$, για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \pmod{m} \wedge a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{mn}.$$

Απόδειξη.

(i) Ευθύ: $\exists x, y \in \mathbb{Z} : a - b = xm = yn$. Από Θ. ΜΚΔ:

$$\begin{aligned} 1 &= \kappa m + \lambda n \Rightarrow x = \kappa x m + \lambda x n = \kappa y n + \lambda x n \\ &\Rightarrow n \mid x \Rightarrow nm \mid xm = a - b. \end{aligned}$$

(ii) Αντίστροφο: $a \equiv b \pmod{mn} \Rightarrow mn \mid (a - b) \Rightarrow m \mid (a - b)$, όμοια για n .

□

Δηλαδή, ισοτιμία στο \mathbb{Z}_m και στο \mathbb{Z}_n συνεπάγεται ισοτιμία στο \mathbb{Z}_{mn} και αντίστροφα.

Επιπλέον, οι ισότιμοι ενός ακεραίου στο \mathbb{Z}_m και στο \mathbb{Z}_n καθορίζουν μοναδικά τον ισότιμό του στο \mathbb{Z}_{mn} , και αντίστροφα.

Ο τελευταίος υπάρχει πάντα για m, n σχετικά πρώτους – αποδεικνύεται με χρήση του Θ. ΜΚΔ:

$$1 = km + ln \Rightarrow a_1 - a_2 = skm + sln \Rightarrow -sln + a_1 = skm + a_2.$$

Αυτή η ιδιότητα γενικεύεται και διατυπώνεται πιο αυστηρά στο περίφημο **Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων**.

Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων (Chinese Remainder Theorem - CRT)

Θεώρημα (Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων)

Εστω ένα σύστημα ισοτιμιών

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

ώστε $\gcd(m_i, m_j) = 1$ για $i \neq j$. Τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση στον δακτύλιο \mathbb{Z}_M** , $M = m_1 m_2 \dots m_k$. Ισοδύναμα: το σύστημα έχει άπειρες λύσεις στο \mathbb{Z} και αν s_1, s_2 δύο λύσεις ισχύει $s_1 \equiv s_2 \pmod{M}$.

Απόδειξη.

Για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$ ορίζουμε $M_i = \frac{M}{m_i}$. Ισχύει $\gcd(M_i, m_i) = 1$.

Επομένως $\exists N_i \in \mathbb{Z}_{m_i} : N_i \cdot M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Επίσης $\forall i \neq j : N_i \cdot M_i \equiv 0 \pmod{m_j}$.

Οπότε μία λύση είναι η παρακάτω (επαληθεύστε):

$$y = \sum_{i=1}^k N_i \cdot M_i \cdot a_i$$

Αν s_1, s_2 δύο διαφορετικές λύσεις τότε έχουμε ότι για κάθε i ,

$$s_1 \equiv s_2 \pmod{m_i}$$

Από πρόταση προηγούμενης διαφάνειας και επαγωγή προκύπτει:

$$s_1 \equiv s_2 \pmod{M}$$



Πολυπλοκότητα: η επίλυση του συστήματος γίνεται σε **πολυωνυμικό χρόνο**.

Δύο ισομορφισμοί:

$$\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_k} \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

ως προς πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό (οι πράξεις στις k -άδες ορίζονται κατά μέλη με τον προφανή τρόπο: τα στοιχεία στη θέση i αθροίζονται / πολλαπλασιάζονται στον δακτύλιο \mathbb{Z}_{m_i} .)

$$U(\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_k}) \cong U(\mathbb{Z}_{m_1}) \times U(\mathbb{Z}_{m_2}) \times \dots \times U(\mathbb{Z}_{m_k})$$

ως προς πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Η πολλαπλασιαστική ομάδα \mathbb{Z}_p^*

- ▶ Είναι κυκλική: π.χ. $\mathbb{Z}_{11}^* = \{1, 2, \dots, 10\} = \{2^1, 2^2, \dots, 2^{10}\} \pmod{11}$.
- ▶ Για κάθε $d \mid (p - 1)$ περιέχει ακριβώς μία κυκλική υποομάδα τάξης d (βλ. και Θεμελιώδες Θεώρημα Κυκλικών Ομάδων).
- ▶ Περιέχει ακριβώς $\phi(p - 1)$ γεννήτορες (μία κυκλική ομάδα τάξης r περιέχει $\phi(r)$ γεννήτορες). Για $p = 2q + 1, q$, υπάρχουν $q - 1$ γεννήτορες.

Η δομή της ομάδας \mathbb{Z}_p^*

Η πολλαπλασιαστική ομάδα \mathbb{Z}_p^*

- ▶ Έλεγχος αν a γεννήτορας: $\forall d \mid p-1, d < p-1: a^{\frac{p-1}{d}} \not\equiv 1 \pmod{p}$. Για $p = 2q + 1, q$, αν $a \not\equiv -1 \wedge a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, τότε a είναι γεννήτορας.
- ▶ Ακριβώς τα μισά στοιχεία είναι **τετραγωνικά υπόλοιπα (quadratic residues) modulo p** , δηλ. είναι τετράγωνα κάποιου αριθμού modulo p . Τα στοιχεία αυτά ταυτίζονται με τις άρτιες δυνάμεις ενός γεννήτορα:

$$QR(p) = \{g^{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}\}$$

Η δομή της ομάδας $U(\mathbb{Z}_{pq})$

Η πολλαπλασιαστική ομάδα $U(\mathbb{Z}_{pq})$, p, q πρώτοι

- ▶ Δεν είναι κυκλική: κάθε στοιχείο έχει τάξη το πολύ $\text{lcm}(p-1, q-1) \mid \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ (βλ. και [συνάρτηση Carmichael](#)).

Π.χ. στην $U(\mathbb{Z}_{15}) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$ πράγματι, κάθε στοιχείο έχει τάξη το πολύ $4 = \text{lcm}(3-1, 5-1)$.

- ▶ Περιέχει υποομάδα τάξης $\text{lcm}(p-1, q-1)$.
- ▶ Ακριβώς το $\frac{1}{4}$ των στοιχείων είναι **τετραγωνικά υπόλοιπα (quadratic residues) modulo n** , δηλ. είναι τετράγωνα κάποιου αριθμού modulo n . Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν συνδυάζοντας με CRT τετραγωνικά υπόλοιπα modulo p με τετραγωνικά υπόλοιπα modulo q .

Τετραγωνικά Υπόλοιπα (Quadratic Residues)

Ορισμός

Ένας ακέραιος $k \in \mathbb{Z}_m$ λέγεται τετραγωνικό υπόλοιπο modulo m αν υπάρχει $l \in \mathbb{Z}_m$ τ.ώ. $k \equiv l^2 \pmod{m}$. Τότε ο l λέγεται τετραγωνική ρίζα του k modulo m .

Παρατήρηση: όπως είδαμε, τα μισά στοιχεία του \mathbb{Z}_p και το $\frac{1}{4}$ των στοιχείων του \mathbb{Z}_{pq} (για p, q πρώτους) είναι τετραγωνικά υπόλοιπα (modulo p και pq αντίστοιχα).

Για αυτά τα στοιχεία και μόνο οι ισοτιμίες:

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \quad x^2 \equiv a \pmod{pq}$$

έχουν λύση. Παρατήρηση: αν x_0 είναι λύση τότε και $-x_0$ είναι λύση. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

Πλήθος τετραγωνικών ριζών modulo n

Πρόταση

Έστω p, q πρώτοι. Τότε:

1. Η ισοτιμία $x^2 \equiv a \pmod{p}$ έχει είτε 0 είτε 2 λύσεις στο \mathbb{Z}_p^* .
2. Η ισοτιμία $x^2 \equiv a \pmod{pq}$ έχει είτε 0 είτε 4 λύσεις στο $U(\mathbb{Z}_{pq})$.

Απόδειξη.

1. Αν x_1, x_2 λύσεις της ισοτιμίας τότε $x_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p}$ άρα
$$p \mid (x_1^2 - x_2^2) \Rightarrow p \mid (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Rightarrow$$
$$p \mid (x_1 - x_2) \vee p \mid (x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \vee x_1 \equiv -x_2 \pmod{p}$$
2. Η λύση της ισοτιμίας ισοδυναμεί με τη λύση των δύο ισοτιμιών $x^2 \equiv a \pmod{p}$, $x^2 \equiv a \pmod{q}$.

Έστω ότι η πρώτη έχει λύσεις τις $x_p, -x_p$ και η δεύτερη τις $x_q, -x_q$. Για κάθε ένα από τους συνδυασμούς των λύσεων αυτών (που είναι 4) προκύπτει, με χρήση CRT, μια διαφορετική λύση για την ισοτιμία στο $U(\mathbb{Z})$, από το σύστημα

$$x \equiv \pm x_p \pmod{p}, x \equiv \pm x_q \pmod{q}.$$

Τετραγωνικές ρίζες modulo n : πρόσθετες ιδιότητες

- ▶ Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να γενικευτεί για $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ όπου η αντίστοιχη εξίσωση έχει είτε 0 είτε 2^k λύσεις.
- ▶ Τετριμμένες περιπτώσεις: στο \mathbb{Z}_p , το $a \equiv 0 \pmod{p}$ έχει μία τετραγωνική ρίζα, το ίδιο και στο \mathbb{Z}_{pq} . Στο \mathbb{Z}_{pq} , αν $a \equiv 0 \pmod{p}$, και $a \not\equiv 0 \pmod{q}$ τότε το a έχει 2 ρίζες που προκύπτουν από το σύστημα $x \equiv 0 \pmod{p}$, $x \equiv \pm x_q \pmod{q}$ με χρήση CRT.

Τετραγωνικές ρίζες modulo n και παραγοντοποίηση

Ο αριθμός 1 έχει δύο τετραγωνικές ρίζες modulo p : ± 1 .

Επίσης έχει 4 τετραγωνικές ρίζες modulo pq : τις ± 1 , και άλλες δύο ($\pm u \not\equiv 1 \pmod{p}q$) που λέγονται **μη τετριμμένες ρίζες της μονάδας modulo n** .

Η ύπαρξη μη τετριμμένων ριζών του 1 modulo n συνιστά απόδειξη ότι ο n είναι **σύνθετος**, και συγχρόνως δίνει άμεσα δύο παράγοντες του n : $\gcd(n, u \pm 1)$.

Παρόμοια πληροφορία παίρνουμε από την ύπαρξη 2 μη αντίθετων τετραγωνικών ριζών οποιουδήποτε αριθμού $a \in \mathbb{Z}_n$.

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην απόδειξη ορθότητας του Miller-Rabin primality test, και σε διάφορες άλλες αποδείξεις (κρυπτοσυστήματα RSA, Rabin, κ.λπ.).

Τετραγωνικές ρίζες modulo n : έλεγχος ύπαρξης

Πρόταση (Κριτήριο Euler)

Για p πρώτο, η ισοτιμία $x^2 \equiv a \pmod{p}$ έχει λύση αν και μόνο αν

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι και οι δύο συνθήκες ισχύουν αν και μόνο αν το a είναι άρτια δύναμη ενός γεννήτορα. Έστω ότι $a \equiv g^k \pmod{p}$ για γεννήτορα g της \mathbb{Z}_p^* .

Τότε:

$$\exists x : x^2 \equiv a \pmod{p} \Leftrightarrow \exists l : g^{2l} \equiv g^k \pmod{p} \Leftrightarrow 2l \equiv k \pmod{p-1} \Leftrightarrow k \bmod 2 = 0.$$

Επίσης, από μικρό Θ . Fermat.:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{k}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow p-1 \mid \frac{k}{2}(p-1) \Leftrightarrow k \bmod 2 = 0$$

□

Παρατήρηση. για κάθε $a \in \mathbb{Z}_p^*$ ισχύει $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση που είναι γνωστή ως **σύμβολο Legendre** και τη γενίκευσή της, το **σύμβολο Jacobi**. Το τελευταίο χρησιμοποιείται στο **Solovay-Strassen primality test**.

Ορισμός

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } \exists x : x^2 \equiv a \pmod{p} \\ -1, & \text{if } \nexists x : x^2 \equiv a \pmod{p} \\ 0, & \text{if } p \mid a \end{cases}$$

Αν $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ τότε το a ονομάζεται *τετραγωνικό υπόλοιπο modulo p* . Αν $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ τότε το a ονομάζεται *τετραγωνικό μη υπόλοιπο modulo p* .

Ιδιότητες συμβόλου Legendre

Πρόταση

1. $m \equiv n \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)$
2. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$
3. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$

Απόδειξη.

(1): άμεσα από τον ορισμό.

(2): αν $a \equiv 0 \pmod{p}$ ισχύει.

Αλλιώς $a \in \mathbb{Z}_p^*$, οπότε αν $a \in QR(n)$ τότε από κριτήριο Euler ισχύει

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Αν $a \notin QR(n)$ τότε επειδή $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$, θα έχουμε αναγκαστικά:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$$

(3) από ιδιότητα 2. □

Σημαντικό: η ιδιότητα (2) δίνει έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού του συμβόλου Legendre.

Ιδιότητες συμβόλου Legendre

Πρόταση

$$1. \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{if } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$2. \left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{8} \vee p \equiv 7 \pmod{8} \\ -1, & \text{if } p \equiv 3 \pmod{8} \vee p \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο:

Λήμμα

(Gauss) Αν το πλήθος των στοιχείων του συνόλου

$\{a \bmod p, 2a \bmod p, \dots, \frac{p-1}{2}a \bmod p\}$ που είναι μεγαλύτερα του $\frac{p}{2}$ το συμβολίσουμε με μ τότε ισχύει ότι $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu$.

Θεώρημα (Νόμος Τετραγωνικής Αντιστροφής (Quadratic Reciprocity Law))

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{q}{p}\right), & \text{αν } p \equiv q \equiv 3 \pmod{4} \\ \left(\frac{q}{p}\right), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Με χρήση του νόμου τετραγωνικής αντιστροφής, και των προηγούμενων ιδιοτήτων έχουμε έναν πιο γρήγορο υπολογισμό του συμβόλου Legendre: $O(\log^2 p)$.

Ορισμός (Σύμβολο Jacobi)

Για $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ ορίζουμε το σύμβολο Jacobi ως εξής:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{m}{p_i}\right)^{a_i}.$$

- ▶ Το σύμβολο Jacobi είναι γενίκευση του συμβόλου Legendre και ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες εκτός της $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$. Το γεγονός αυτό χρησιμοποιείται στον έλεγχο πρώτων αριθμών Solovay-Strassen.
- ▶ Το σύμβολο Jacobi $\left(\frac{a}{n}\right)$ δεν χαρακτηρίζει πλήρως την ύπαρξη λύσεων της ισοτιμίας $x^2 \equiv a \pmod{n}$. Πράγματι, αν η ισοτιμία αυτή έχει λύσεις τότε $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο (π.χ. για $n = pq$, $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{a}{n}\right) = 1$).

Έλεγχος πρώτων αριθμών Miller-Rabin

1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ θετικός περιττός αριθμός.
2. Επιλέγουμε τυχαία $b \in [2, \dots, n - 1]$. Αν $b^{n-1} \bmod n \neq 1$, τότε το n **δεν περνάει** τον έλεγχο (είναι **σίγουρα σύνθετος**).
3. Αλλιώς, γράφουμε $n - 1 = 2^s t$, με t περιτό.
4. Αν $b^t \bmod n \equiv \pm 1 \pmod{n}$, τότε το n **περνάει** τον έλεγχο (πιθανόν πρώτος).
5. Αλλιώς, υψώνουμε το $b^t \bmod n$ στο τετράγωνο: $b^{2t} \bmod n$, έπειτα ξανά στο τετράγωνο $\bmod n$ κ.ο.κ. εως ότου πάρουμε ± 1 (το πολύ $s - 1$ επαναλήψεις).
6. Αν πάρουμε **πρώτα** -1 τότε το n **περνάει** τον έλεγχο (πιθανόν πρώτος), **αλλιώς δεν περνάει** τον έλεγχο (σίγουρα σύνθετος).

Ορθότητα: Θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα αποτυχίας είναι $< \frac{1}{2}$. Μπορεί να γίνει αμελητέα (*negligible*) με **επαναλήψεις του ελέγχου για άλλο b κάθε φορά**.

Έλεγχος πρώτων αριθμών Miller-Rabin: ορθότητα

Πρόταση

Αν n πρώτος, τότε περνάει τον έλεγχο πάντοτε (για όλα τα b). Αν n σύνθετος τότε περνάει τον έλεγχο για **λιγότερα από τα μισά b** .

Απόδειξη.

Βασίζεται στην απεικόνιση $b \mapsto \langle b^t, b^{2t}, \dots, b^{2^i t}, \dots, b^{2^s t} \rangle \pmod{n}$.

Factoring sequence: $\langle \not\equiv \pm 1, \dots, \not\equiv \pm 1, \equiv 1, \dots \equiv 1 \rangle \pmod{n}$.

Αποδεικνύεται με χρήση του Θ. Lagrange ότι τα στοιχεία που απεικονίζονται σε non-factoring sequences είναι το πολύ τα μισά.

Λεπτομέρειες: στον πίνακα. □

Ευεπίλυτα αριθμητικά προβλήματα

Χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αποδοτικού (πολυωνυμικού χρόνου) αλγορίθμου, ντετερμινιστικού ή πιθανοτικού.

- ▶ $\text{GCD}(a, n)$: εύρεση ΜΚΔ(a, n).
- ▶ $\text{INVERSE}(a, n)$: υπολογισμός $a^{-1} \pmod n$.
- ▶ $\text{POWER}(a, y, n)$: υπολογισμός $a^y \pmod n$.
- ▶ $\text{PRIMALITY}(n)$: έλεγχος αν ο n είναι πρώτος αριθμός.
- ▶ $\text{FIND-PRIME}(n)$: εύρεση πρώτου $> n$.
- ▶ $\text{QUAD-RES}(a, n)$: έλεγχος αν $\exists x : x^2 \equiv a \pmod n$. Για n πρώτο, ή σύνθετο με γνωστή παραγοντοποίηση.
- ▶ $\text{SQUARE-ROOT}(a, n)$: εύρεση $x : x^2 \equiv a \pmod n$, αν υπάρχει. Για n πρώτο, ή σύνθετο με γνωστή παραγοντοποίηση.

Δυσεπίλυτα αριθμητικά προβλήματα

Χαρακτηρίζονται από την μη ύπαρξη (ως τώρα) αποδοτικού (πολυωνυμικού χρόνου) αλγορίθμου, ντετερμινιστικού ή πιθανοτικού.

- ▶ **FACTOR(n)**: παραγοντοποίηση του n .
- ▶ **e -TH-ROOT(c, n)**: εύρεση $m : m^e \equiv c \pmod{n}$. Γνωστό και ως RSA-DECRYPT(c, n). Δύσκολο για n σύνθετο με άγνωστη παραγοντοποίηση.
- ▶ **DISCRETE-LOG(g, a, p)**: εύρεση $x : g^x \equiv a \pmod{p}$. Δύσκολο για p πρώτο.
- ▶ **QUAD-RES(a, n)**: έλεγχος αν $\exists x : x^2 \equiv a \pmod{n}$. Δύσκολο για n σύνθετο με άγνωστη παραγοντοποίηση.
- ▶ **SQUARE-ROOT(a, n)**: εύρεση $x : x^2 \equiv a \pmod{n}$, αν υπάρχει. Δύσκολο για n σύνθετο με άγνωστη παραγοντοποίηση.