Διακριτές Μέθοδοι
για την Επιστήμη των Υπολογιστών

2η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων:
λύσεις 1ης γραπτής εργασίας.

25 Απρίλη 2018

Θέμα 1(α)

(α) Μια συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι πολυωνυμική βαθμού d όταν υπάρχουν φυσικοί $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με P_d το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $P = \cup_{d \in \mathbb{N}} P_d$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν τα σύνολα P_d και P είναι αριθμήσιμα.

- Το P_d είναι αριθμήσιμο αφού υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία από το P_d στο $\mathbb{N}^{d+1}$ και το $\mathbb{N}^{d+1}$ είναι αριθμήσιμο.
- Το P είναι αριθμήσιμο σαν αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων.

Θέμα 1(α)

(α) Μια συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι πολυωνυμική βαθμού d όταν υπάρχουν φυσικοί $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με P_d το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $P = \cup_{d \in \mathbb{N}} P_d$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν τα σύνολα P_d και P είναι αριθμήσιμα.

- Το P_d είναι αριθμήσιμο αφού υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία από το P_d στο $\mathbb{N}^{d+1}$ και το $\mathbb{N}^{d+1}$ είναι αριθμήσιμο.
- Το P είναι αριθμήσιμο σαν αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων.

Θέμα 1(α)

(α) Μια συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι πολυωνυμική βαθμού d όταν υπάρχουν φυσικοί $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με P_d το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $P = \cup_{d \in \mathbb{N}} P_d$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν τα σύνολα P_d και P είναι αριθμήσιμα.

- Το P_d είναι αριθμήσιμο αφού υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία από το P_d στο $\mathbb{N}^{d+1}$ και το $\mathbb{N}^{d+1}$ είναι αριθμήσιμο.
- Το P είναι αριθμήσιμο σαν αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων.

Θέμα 1(β)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), να δείξετε ότι υπάρχουν (άπειρες) συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που δεν ανήκουν στο P, δηλ. που δεν μπορούν να εκφραστούν ως πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Απόδειξη με διαγωνιοποίηση: κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε πολυωνυμική συνάρτηση, κάθε στήλη στον αντίστοιχο φυσικό.

	0	1	...	k	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	...	$f_0(k)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	...	$f_1(k)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
f_k	$f_k(0)$	$f_k(1)$	...	$f_k(k)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\ddots$

Η $f : f(i) = f_i(i) + 1$ δεν εμφανίζεται σε καμία γραμμή.

Θέμα 1(γ)

(γ) Ο κωδκός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν πρώτο αριθμό q . Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t) \ mod \ q$. Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της συνάρτησης, και ο q δεν σας είναι γνωστά. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο *reset* και μπορείτε άφοβα να δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 ή περισσότερα δευτερόλεπτα. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου.

- Το σύνολο Συνάρτηση×Αρχικός Κωδικός×Πρώτος αριθμός, είναι αριθμήσιμο σαν καρτεσιανό γινόμενο τριών αριθμησίμων συνόλων.
- Για κάθε τριάδα $((a_d, \ldots, a_0), x_0, q)$, μπορώ με διαδοχικές εφαρμογές του $x_{t+1} = p(x_t) \ mod \ q$ να βρίσκω το x_t για οποιοδήποτε t.
- Αλγόριθμος: Ακολουθώντας την απαρίθμηση των τριάδων, κάθε 30 δευτερόλεπτα δοκιμάζω την τιμή που θα έδινε η επόμενη στη σειρά τριάδα.

Θέμα 1(γ)

(γ) Ο κωδικός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν πρώτο αριθμό q . Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t)$ *mod* q . Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της συνάρτησης, και ο q δεν σας είναι γνωστά. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο *reset* και μπορείτε άφοβα να δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 ή περισσότερα δευτερόλεπτα. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου.

- Το σύνολο Συνάρτηση×Αρχικός Κωδικός×Πρώτος αριθμός, είναι αριθμήσιμο σαν καρτεσιανό γινόμενο τριών αριθμησίμων συνόλων.
- Για κάθε τριάδα $((a_d, \ldots, a_0), x_0, q)$, μπορώ με διαδοχικές εφαρμογές του $x_{t+1} = p(x_t)$ *mod* q να βρίσκω το x_t για οποιοδήποτε t.
- Αλγόριθμος: Ακολουθώντας την απαρίθμηση των τριάδων, κάθε 30 δευτερόλεπτα δοκιμάζω την τιμή που θα έδινε η επόμενη στη σειρά τριάδα.

Θέμα 1(γ)

(γ) Ο κωδικός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν πρώτο αριθμό q . Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t) \ mod \ q$. Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της συνάρτησης, και ο q δεν σας είναι γνωστά. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο *reset* και μπορείτε άφοβα να δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 ή περισσότερα δευτερόλεπτα. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου.

- Το σύνολο Συνάρτηση×Αρχικός Κωδικός×Πρώτος αριθμός, είναι αριθμήσιμο σαν καρτεσιανό γινόμενο τριών αριθμησίμων συνόλων.
- Για κάθε τριάδα $((a_d, \ldots, a_0), x_0, q)$, μπορώ με διαδοχικές εφαρμογές του $x_{t+1} = p(x_t) \ mod \ q$ να βρίσκω το x_t για οποιοδήποτε t.
- Αλγόριθμος: Ακολουθώντας την απαρίθμηση των τριάδων, κάθε 30 δευτερόλεπτα δοκιμάζω την τιμή που θα έδινε η επόμενη στη σειρά τριάδα.

Θέμα 1(γ)

(γ) Ο κωδικός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν πρώτο αριθμό q . Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t) \; mod \; q$. Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της συνάρτησης, και ο q δεν σας είναι γνωστά. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο *reset* και μπορείτε άφοβα να δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 ή περισσότερα δευτερόλεπτα. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου.

- Το σύνολο Συνάρτηση×Αρχικός Κωδικός×Πρώτος αριθμός, είναι αριθμήσιμο σαν καρτεσιανό γινόμενο τριών αριθμησίμων συνόλων.
- Για κάθε τριάδα $((a_d, \ldots, a_0), x_0, q)$, μπορώ με διαδοχικές εφαρμογές του $x_{t+1} = p(x_t) \; mod \; q$ να βρίσκω το x_t για οποιοδήποτε t.
- Αλγόριθμος: Ακολουθώντας την απαρίθμηση των τριάδων, κάθε 30 δευτερόλεπτα δοκιμάζω την τιμή που θα έδινε η επόμενη στη σειρά τριάδα.

Θέμα 2(1)

1. Συμβολίζουμε με $p|q$ το 'ούτε p ούτε q'.
(α) Ορίστε τον αληθοπίνακα του $p|q$, Ξρησιμοποιώντας ως μόνο λογικό σύνδεσμο τον '$|$' βρείτε έκφραση για τα: (ι) $\neg p$, (ιι) $p \wedge q$, (ιιι) $p \vee q$ και (ιv) $p \rightarrow q$

Αληθοπίνακας:

p	q	$p\|q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

(ι): $\neg p \equiv p|p$
(ιι): $p \wedge q \equiv \neg p|\neg q \equiv (p|p)|(q|q)$
(ιιι): $p \vee q \equiv \neg(p|q) \equiv (p|q)|(p|q)$
(ιv): $p \rightarrow q \equiv (p|p) \vee q \equiv ((p|p)|q)|((p|p)|q)$

Θέμα 2(1)

1. Συμβολίζουμε με $p|q$ το 'ούτε p ούτε q'.
(β) Είναι κάποια από τις εκφράσεις που ακολουθούν αντίφαση ή ταυτολογία; Εξηγήστε την απάντησή σας.
(ι) $\{[(p|q)|(p|q)] \wedge (p|p)\} \rightarrow q$
(ιι) $\{(p|p)|[(p \rightarrow q)|(p \rightarrow q)]\} \wedge \{[(p|p)|(q|q)]|[(p|p)|(q|q)]\}$

Από ερώτημα (α): $\neg p \equiv p|p$, $p \wedge q \equiv (p|p)|(q|q)$ και $p \vee q \equiv (p|q)|(p|q)$.

(ι) Ταυτολογία: $\{[p \vee q] \wedge \neg p\} \rightarrow q$ (αν $[p \vee q]$ και $\neg p$ τότε q)

(ιι) Αντίφαση: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \wedge \neg(p \wedge q)$
(από $[p \wedge (p \rightarrow q)]$ παίρνουμε (p και q), αντίφαση με το όχι (p και q))

Θέμα 2(2)

2. Ο Ηρακλής Πουαρό ανακρίνει 4 υπόπτους για ένα έγκλημα. Από τις ιστορίες των αυτόπτων μαρτύρων ο Ηρακλής έχει καταλήξει στα εξής:
(α) αν ο μπάτλερ λέει αλήθεια, τότε και ο μάγειρας λέει αλήθεια,
(β) ο μάγειρας και ο κηπουρός δεν μπορεί να λένε και οι δύο αλήθεια,
(γ) ο κηπουρός και ο μάστορας δεν μπορεί να λένε και οι δύο ψέματα,
(δ) αν ο μάστορας λέει αλήθεια τότε ο μάγειρας λέει ψέματα.
Μπορεί ο Ηρακλής να καταλάβει ποιος λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

Μπάτλερ αλήθεια: p, μάγειρας αλήθεια: q, κηπουρός αλήθεια: r, μάστορας αλήθεια: s. Τότε:
(α) $p \to q$, (β) $\neg(q \wedge r)$, (γ) $r \vee s$, (δ) $s \to \neg q$

- Αν q, τότε όχι r από (β) και άρα s από (γ) και οχι q από (δ).
- Συνεπώς, όχι q, αλλά ούτε p λόγω (α).
- Όμως $(\neg p, \neg q, r, s)$, $(\neg p, \neg q, r, \neg s)$ και $(\neg p, \neg q, \neg r, s)$ ικανοποιούν τα (α), (β), (γ) και (δ).

Ο Ηρακλής δεν μπορεί.

Θέμα 2(2)

2. Ο Ηρακλής Πουαρό ανακρίνει 4 υπόπτους για ένα έγκλημα. Από τις ιστορίες των αυτόπτων μαρτύρων ο Ηρακλής έχει καταλήξει στα εξής:
(α) αν ο μπάτλερ λέει αλήθεια, τότε και ο μάγειρας λέει αλήθεια,
(β) ο μάγειρας και ο κηπουρός δεν μπορεί να λένε και οι δύο αλήθεια,
(γ) ο κηπουρός και ο μάστορας δεν μπορεί να λένε και οι δύο ψέματα,
(δ) αν ο μάστορας λέει αλήθεια τότε ο μάγειρας λέει ψέματα.
Μπορεί ο Ηρακλής να καταλάβει ποιος λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

Μπάτλερ αλήθεια: p, μάγειρας αλήθεια: q, κηπουρός αλήθεια: r, μάστορας αλήθεια: s. Τότε:
(α) $p \rightarrow q$, (β) $\neg(q \wedge r)$, (γ) $r \vee s$, (δ) $s \rightarrow \neg q$

- Αν q, τότε όχι r από (β) και άρα s από (γ) και οχι q από (δ).
- Συνεπώς, όχι q, αλλά ούτε p λόγω (α).
- Όμως $(\neg p, \neg q, r, s)$, $(\neg p, \neg q, r, \neg s)$ και $(\neg p, \neg q, \neg r, s)$ ικανοποιούν τα (α), (β), (γ) και (δ).

<u>Ο Ηρακλής δεν μπορεί.</u>

Θέμα 2(2)

2. Ο Ηρακλής Πουαρό ανακρίνει 4 υπόπτους για ένα έγκλημα. Από τις ιστορίες των αυτόπτων μαρτύρων ο Ηρακλής έχει καταλήξει στα εξής:
(α) αν ο μπάτλερ λέει αλήθεια, τότε και ο μάγειρας λέει αλήθεια,
(β) ο μάγειρας και ο κηπουρός δεν μπορεί να λένε και οι δύο αλήθεια,
(γ) ο κηπουρός και ο μάστορας δεν μπορεί να λένε και οι δύο ψέματα,
(δ) αν ο μάστορας λέει αλήθεια τότε ο μάγειρας λέει ψέματα.
Μπορεί ο Ηρακλής να καταλάβει ποιος λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

Μπάτλερ αλήθεια: p, μάγειρας αλήθεια: q, κηπουρός αλήθεια: r, μάστορας αλήθεια: s. Τότε:
(α) $p \to q$, (β) $\neg(q \wedge r)$, (γ) $r \vee s$, (δ) $s \to \neg q$

- Αν q, τότε όχι r από (β) και άρα s από (γ) και οχι q από (δ).
- Συνεπώς, όχι q, αλλά ούτε p λόγω (α).
- Όμως $(\neg p, \neg q, r, s)$, $(\neg p, \neg q, r, \neg s)$ και $(\neg p, \neg q, \neg r, s)$ ικανοποιούν τα (α), (β), (γ) και (δ).

Ο Ηρακλής δεν μπορεί.

Θέμα 2(2)

2. Ο Ηρακλής Πουαρό ανακρίνει 4 υπόπτους για ένα έγκλημα. Από τις ιστορίες των αυτόπτων μαρτύρων ο Ηρακλής έχει καταλήξει στα εξής:
(α) αν ο μπάτλερ λέει αλήθεια, τότε και ο μάγειρας λέει αλήθεια,
(β) ο μάγειρας και ο κηπουρός δεν μπορεί να λένε και οι δύο αλήθεια,
(γ) ο κηπουρός και ο μάστορας δεν μπορεί να λένε και οι δύο ψέματα,
(δ) αν ο μάστορας λέει αλήθεια τότε ο μάγειρας λέει ψέματα.
Μπορεί ο Ηρακλής να καταλάβει ποιος λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

Μπάτλερ αλήθεια: p, μάγειρας αλήθεια: q, κηπουρός αλήθεια: r, μάστορας αλήθεια: s. Τότε:
(α) $p \to q$, (β) $\neg(q \wedge r)$, (γ) $r \vee s$, (δ) $s \to \neg q$

- Αν q, τότε όχι r από (β) και άρα s από (γ) και οχι q από (δ).
- Συνεπώς, όχι q, αλλά ούτε p λόγω (α).
- Όμως $(\neg p, \neg q, r, s)$, $(\neg p, \neg q, r, \neg s)$ και $(\neg p, \neg q, \neg r, s)$ ικανοποιούν τα (α), (β), (γ) και (δ).

Ο Ηρακλής δεν μπορεί.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης', (2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(α) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας από τους 4 λέει την αλήθεια, τότε ποιός το έκανε;

(α) Ο Αλέξανδρος το έκανε.

- Αν ο Βασίλης λέει αλήθεια, Ευαγγελία ένοχη και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος, άτοπο.
- Αν ο Βασίλης λέει ψέματα τότε η Ευαγγελία λέει αλήθεια, και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης', (2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(α) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας από τους 4 λέει την αλήθεια, τότε ποιός το έκανε;

(α) Ο Αλέξανδρος το έκανε.

- Αν ο Βασίλης λέει αλήθεια, Ευαγγελία ένοχη και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος, άτοπο.
- Αν ο Βασίλης λέει ψέματα τότε η Ευαγγελία λέει αλήθεια, και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε ‘Το έκανε ο Βασίλης’, (2) ο Αλέξανδρος είπε ‘Εγώ δεν το έκανα’, (3) ο Βασίλης είπε ‘Η Ευαγγελία το έκανε’ και (4) η Ευαγγελία είπε ‘Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ ’.
(α) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας από τους 4 λέει την αλήθεια, τότε ποιός το έκανε;

(α) Ο Αλέξανδρος το έκανε.

- Αν ο Βασίλης λέει αλήθεια, Ευαγγελία ένοχη και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος, άτοπο.
- Αν ο Βασίλης λέει ψέματα τότε η Ευαγγελία λέει αλήθεια, και από μοναδικό ειλικρινή, ο Αλέξανδρος ψέματα και άρα ένοχος.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης' ,(2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(β) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας λέει ψέματα, τότε ποιός το έκανε;

(β) Ο Βασίλης το έκανε.

- Αν Ευαγγελία ψέματα, τότε αφού μοναδικός ψεύτης, Βασίλης και Νίκος αλήθεια.
- Από (1) Βασίλης ένοχος και από (3) Ευαγγελία ένοχος, άτοπο.
- Άρα Ευαγγελία αλήθεια και από (4) αθώα και Βασίλης ψεύτης.
- Αφού μοναδικός ψεύτης, Νίκος αλήθεια και άρα το έκανε ο Βασίλης.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης' ,(2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(β) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας λέει ψέματα, τότε ποιός το έκανε;

(β) Ο Βασίλης το έκανε.

- Αν Ευαγγελία ψέματα, τότε αφού μοναδικός ψεύτης, Βασίλης και Νίκος αλήθεια.
- Από (1) Βασίλης ένοχος και από (3) Ευαγγελία ένοχος, άτοπο.
- Άρα Ευαγγελία αλήθεια και από (4) αθώα και Βασίλης ψεύτης.
- Αφού μοναδικός ψεύτης, Νίκος αλήθεια και άρα το έκανε ο Βασίλης.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης' ,(2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(β) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας λέει ψέματα, τότε ποιός το έκανε;

(β) Ο Βασίλης το έκανε.

- Αν Ευαγγελία ψέματα, τότε αφού μοναδικός ψεύτης, Βασίλης και Νίκος αλήθεια.
- Από (1) Βασίλης ένοχος και από (3) Ευαγγελία ένοχος, άτοπο.
- Άρα Ευαγγελία αλήθεια και από (4) αθώα και Βασίλης ψεύτης.
- Αφού μοναδικός ψεύτης, Νίκος αλήθεια και άρα το έκανε ο Βασίλης.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης' ,(2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(β) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας λέει ψέματα, τότε ποιός το έκανε;

(β) Ο Βασίλης το έκανε.

- Αν Ευαγγελία ψέματα, τότε αφού μοναδικός ψεύτης, Βασίλης και Νίκος αλήθεια.
- Από (1) Βασίλης ένοχος και από (3) Ευαγγελία ένοχος, άτοπο.
- Άρα Ευαγγελία αλήθεια και από (4) αθώα και Βασίλης ψεύτης.
- Αφού μοναδικός ψεύτης, Νίκος αλήθεια και άρα το έκανε ο Βασίλης.

Θέμα 2(3)

3. Τέσσερις φίλοι είναι ύποπτοι για παράνομο κατέβασμα ταινιών και ο κάθε ένας έχει δώσει μια κατάθεση. (1) Ο Νίκος είπε 'Το έκανε ο Βασίλης' ,(2) ο Αλέξανδρος είπε 'Εγώ δεν το έκανα', (3) ο Βασίλης είπε 'Η Ευαγγελία το έκανε' και (4) η Ευαγγελία είπε 'Ο Βασίλης είπε ψέματα όταν είπε ότι το έκανα εγώ '.
(β) Αν ξέρουμε ότι ακριβώς ένας λέει ψέματα, τότε ποιός το έκανε;

(β) Ο Βασίλης το έκανε.

- Αν Ευαγγελία ψέματα, τότε αφού μοναδικός ψεύτης, Βασίλης και Νίκος αλήθεια.
- Από (1) Βασίλης ένοχος και από (3) Ευαγγελία ένοχος, άτοπο.
- Άρα Ευαγγελία αλήθεια και από (4) αθώα και Βασίλης ψεύτης.
- Αφού μοναδικός ψεύτης, Νίκος αλήθεια και άρα το έκανε ο Βασίλης.

Θέμα 3(α)

Θέλουμε να εκφράσουμε ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας πίνακας $A \in \mathbb{N}^{20\times 30}$. Είμαστε στο σύμπαν των θετικών ακεραίων εφοδιασμένο με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, δύο συναρτησιακά σύμβολα $f(x,y)$ και $g(x,y)$, και τέσσερις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4. Ερμηνεύουμε το $P(x,y) \equiv x \leq y$, το $f(x,y) = x + y$, το $g(x,y) = A[x,y]$, τις σταθερές $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$ και $c_4 = 40$. α) Σε αυτή την ερμηνεία να διατυπώσετε:
1. Τύπο $\phi_1(x)$ που να αληθεύει για τις γραμμές του πίνακα που είναι ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά.
2. Τύπο $\phi_2(x,y)$ που να αληθεύει για κάθε θέση του πίνακα που η τιμή της είναι διαφορετική από τις τιμές των θέσεων που βρίσκονται στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή με αυτήν.

1. $\phi_1(x) = \forall y\{P(f(y,c_1),c_3) \to P(g(x,y), g(x, f(y,c_1)))\}$

2. $\phi_2(x,y) = \forall z\{[P(z,c_3) \wedge \neg(y = z)] \to \neg(g(x,y) = g(x,z))\}$
$\wedge \forall z\{[P(z,c_2) \wedge \neg(x = z)] \to \neg(g(x,y) = g(z,y))\}$

Θέμα 3(α)

Θέλουμε να εκφράσουμε ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας πίνακας $A \in \mathbb{N}^{20\times 30}$. Είμαστε στο σύμπαν των θετικών ακεραίων εφοδιασμένο με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, δύο συναρτησιακά σύμβολα $f(x,y)$ και $g(x,y)$, και τέσσερις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4. Ερμηνεύουμε το $P(x,y) \equiv x \leq y$, το $f(x,y) = x + y$, το $g(x,y) = A[x,y]$, τις σταθερές $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$ και $c_4 = 40$. α) Σε αυτή την ερμηνεία να διατυπώσετε:

3. Πρόταση που δηλώνει πως όλα τα στοιχεία του A είναι μεταξύ 20 και 40.
4. Πρόταση που δηλώνει πως υπάρχει γραμμή με όλα τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα.
5. Πρόταση που δηλώνει πως σε κάθε γραμμή του A υπάρχει στοιχείο που ξεπερνά το 40.

3. $\forall x \forall y \{[P(x,c_2) \wedge P(y,c_3)] \rightarrow [P(c_2, g(x,y)) \wedge P(g(x,y), c_4)]\}$

4. $\exists x \forall y \{[P(x,c_2)] \wedge [P(y,c_3) \rightarrow g(x,y) = c_1]\}$

5. $\forall x \{P(x,c_2) \rightarrow \exists y [P(y,c_3) \wedge \neg P(g(x,y),c_4)]\}$

Θέμα 3(α)

Θέλουμε να εκφράσουμε ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας πίνακας $A \in \mathbb{N}^{20\times 30}$. Είμαστε στο σύμπαν των θετικών ακεραίων εφοδιασμένο με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, δύο συναρτησιακά σύμβολα $f(x,y)$ και $g(x,y)$, και τέσσερις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4. Ερμηνεύουμε το $P(x,y) \equiv x \leq y$, το $f(x,y) = x + y$, το $g(x,y) = A[x,y]$, τις σταθερές $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$ και $c_4 = 40$. α) Σε αυτή την ερμηνεία να διατυπώσετε:

6. Πρόταση που δηλώνει πως κάθε στοιχείο του πίνακα μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δύο στοιχείων, ένα από την ίδια γραμμή και ένα από την ίδια στήλη.
7. Πρόταση που δηλώνει πως σε κάθε θέση του πίνακα βρίσκεται στοιχείο μικρότερο ή ίσο από όλα τα στοιχεία σε θέσεις μικρότερης ή ίσης γραμμής και στήλης.

6. $\forall x \forall y \{[P(x,c_2) \land P(y,c_3)] \rightarrow$
$\exists z \exists w [P(z,c_2) \land P(w,c_3) \land g(x,y) = f(g(x,w), g(z,y))]\}$

7. $\forall x \forall y \forall z \forall w \{[P(x,c_2) \land P(y,c_3) \land P(z,c_2) \land P(w,c_3)] \rightarrow$
$[(P(z,x) \land P(w,y)) \rightarrow P(g(x,y), g(z,w))]\}$

Θέμα 3(β)

Θέλουμε να εκφράσουμε ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας πίνακας $A \in \mathbb{N}^{20\times 30}$. Είμαστε στο σύμπαν των θετικών ακεραίων εφοδιασμένο με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, δύο συναρτησιακά σύμβολα $f(x,y)$ και $g(x,y)$, και τέσσερις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4. Ερμηνεύουμε το $P(x,y) \equiv x \leq y$, το $f(x,y) = x + y$, το $g(x,y) = A[x,y]$, τις σταθερές $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$ και $c_4 = 40$.
β) Αν δεν υπήρχαν οι σταθερές c_2, c_3 και c_4 θα μπορούσαμε να τις εκφράσουμε με τα υπόλοιπα σύμβολα (σταθερές, συναρτησιακά σύμβολα);

Ναι, με τη βοήθεια της c_1 και του f (μονάδα και πρόσθεση).

Θέμα 4(1)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\phi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y))) \to \forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της ϕ

Η ϕ είναι λογικά έγκυρη:

- Έστω $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(z,x) \lor P(z,y)))$
- Για $x = y$ ισχύει $P(x,y)$ και άρα $\forall z (P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Συνεπώς $\forall z (P(x,z) \lor P(z,x)))$ που δίνει $\forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x)))$.

Θέμα 4(1)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\phi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της ϕ

Η ϕ είναι λογικά έγκυρη:

- Έστω $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(z,x) \vee P(z,y)))$
- Για $x = y$ ισχύει $P(x,y)$ και άρα $\forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Συνεπώς $\forall z (P(x,z) \vee P(z,x)))$ που δίνει $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x)))$.

Θέμα 4(1)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\phi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \rightarrow \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της ϕ

Η ϕ είναι λογικά έγκυρη:

- Έστω $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(z,x) \vee P(z,y)))$
- Για $x = y$ ισχύει $P(x,y)$ και άρα $\forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Συνεπώς $\forall z (P(x,z) \vee P(z,x)))$ που δίνει $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x)))$.

Θέμα 4(1)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\phi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y(P(x,y) \to \forall z(P(x,z) \lor P(z,y))) \to \forall x \forall y(P(x,y) \lor P(y,x))$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της ϕ

Η ϕ είναι λογικά έγκυρη:

- Έστω $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y(P(x,y) \to \forall z(P(z,x) \lor P(z,y)))$
- Για $x = y$ ισχύει $P(x,y)$ και άρα $\forall z(P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Συνεπώς $\forall z(P(x,z) \lor P(z,x)))$ που δίνει $\forall x \forall y(P(x,y) \lor P(y,x)))$.

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:

- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \lor P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \lor P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \rightarrow \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \lor P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \rightarrow \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \rightarrow \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:

- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \lor P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \lor P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(2)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \rightarrow \exists x \forall y P(y,x)$$

2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Βάση: Με σύμπαν ενός στοιχείου το $\forall x P(x,x)$, δίνει $\exists x \forall y P(y,x)$

ΕΥ:
- Για $|\mathcal{U}| = k$ ισχύει. Έστω σύμπαν με $k+1$ στοιχεία.
- $\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$
- Αφαιρώ το w από το σύμπαν.
- Από ΕΥ υπάρχει u τέτοιο ώστε $\forall y P(y,u)$
- Αν $P(w,u)$ τελειώσαμε, έστω $\neg P(w,u)$
- Για $x \neq w$ έχω $P(x,u)$ που με $y = u$ δίνει $\forall z (P(x,z) \vee P(z,u))$
- Με $z = w$ και αφού $\neg P(w,u)$, έχω $P(x,w)$.
- Κατά συνέπεια $\forall x P(x,w)$

Θέμα 4(3)

Έστω μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \exists x \forall y P(y,x)$$

3. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της ψ.

Ερμηνεία: Σύμπαν οι φυσικοί αριθμοί και P η $\leq$.

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \Big\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(z, x) \Big\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \Big\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(z, x) \Big\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \left\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(z, x) \right\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \left\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \to R(z, x) \right\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \Big\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(z, x) \Big\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
    - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
    - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική και $\forall x \forall y \forall z \Big\{ [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(z, x) \Big\}$

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R συμμετρική: $R(x, x)$ και $R(x, y)$ από κυκλικότητα δίνουν $R(y, x)$
- R μεταβατική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
    - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
    - $R(x, z)$ από κυκλικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R κυκλική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(z, x)$ από μεταβατικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R κυκλική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(z, x)$ από μεταβατικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R κυκλική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(z, x)$ από μεταβατικότητα

Θέμα 5(α)

Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R κυκλική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
    - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
    - $R(z, x)$ από μεταβατικότητα

Θέμα 5(α)

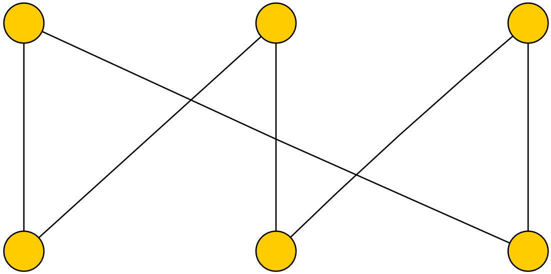
Μία διμελής σχέση R είναι κυκλική αν για κάθε τριάδα στοιχείων x, y, z, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (z, x) \in R$. Να δείξετε ότι μια σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω R ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική

- R ανακλαστική: εξ υποθέσεως
- R κυκλική: αν $R(x, y)$ και $R(y, z)$ τότε
  - $R(y, x)$ και $R(z, y)$ από συμμετρικότητα και άρα
  - $R(z, x)$ από μεταβατικότητα

Θέμα 5(β)

Να σχεδιάσετε διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου το οποίο έχει 3 minimal και 3 maximal στοιχεία, και κάθε στοιχείο του είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από (ακριβώς) δύο άλλα στοιχεία.



Θέμα 5(γ)

Ορίζουμε μία σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_+$, $(n, m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση μερικής διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Η R δεν είναι σχέση μερικής διάταξης:

- Ανακλαστική είναι:
  $(n, n) \in R$ αφού κάθε παράγοντας του n είναι παράγοντας του n.
- Μεταβατική είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του z τότε οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του z.
- Αντισυμμετρική δεν είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του n δεν ισχύει $n = m$.
  Αντιπαράδειγμα: $n = 2 \cdot 3^2$, $m = 2^2 \cdot 3$.

Θέμα 5(γ)

Ορίζουμε μία σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_+$, $(n, m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση μερικής διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Η R δεν είναι σχέση μερικής διάταξης:

- Ανακλαστική είναι:
  $(n, n) \in R$ αφού κάθε παράγοντας του n είναι παράγοντας του n.
- Μεταβατική είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του z τότε οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του z.
- Αντισυμμετρική δεν είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του n δεν ισχύει $n = m$.
  Αντιπαράδειγμα: $n = 2 \cdot 3^2$, $m = 2^2 \cdot 3$.

Θέμα 5(γ)

Ορίζουμε μία σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_+$, $(n, m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση μερικής διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Η R δεν είναι σχέση μερικής διάταξης:

- Ανακλαστική είναι:
  $(n, n) \in R$ αφού κάθε παράγοντας του n είναι παράγοντας του n.
- Μεταβατική είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του z τότε οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του z.
- Αντισυμμετρική δεν είναι:
  αν οι παράγοντές του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του n δεν ισχύει $n = m$.
  Αντιπαράδειγμα: $n = 2 \cdot 3^2$, $m = 2^2 \cdot 3$.

Θέμα 5(γ)

Ορίζουμε μία σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_+$, $(n, m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση μερικής διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Η R δεν είναι σχέση μερικής διάταξης:

- Ανακλαστική είναι:
  $(n, n) \in R$ αφού κάθε παράγοντας του n είναι παράγοντας του n.
- Μεταβατική είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του z τότε οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του z.
- Αντισυμμετρική δεν είναι:
  αν οι παράγοντες του n είναι παράγοντες του m και οι παράγοντες του m είναι παράγοντες του n δεν ισχύει $n = m$.
  Αντιπαράδειγμα: $n = 2 \cdot 3^2$, $m = 2^2 \cdot 3$.

Θέμα 5(δ)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Να διατυπώσετε μία πρόταση που να δηλώνει ότι (η διμελής σχέση με την οποία ερμηνεύουμε) το P είναι lattice.

$$\forall x \forall y \exists z \Big\{ P(x,z) \wedge P(y,z) \wedge \forall w \Big[(P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow P(z,w) \Big] \Big\}$$

$$\wedge$$

$$\forall x \forall y \exists z \Big\{ P(z,x) \wedge P(z,y) \wedge \forall w \Big[(P(w,x) \wedge P(w,y)) \rightarrow P(w,z) \Big] \Big\}$$

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει εύκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}, \exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}, \exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει εύκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}, \exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}, \exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:

- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k + 1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k + 1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:

- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:
- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(α)

Θεωρούμε μία χώρα με $n \geq 2$ πόλεις, όπου για κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων (x, y) υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση (μονής κατεύθυνσης) είτε από την x στην y είτε από την y στην x. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των πόλεων:

Βάση: για 2 πόλεις υπάρχει δρόμος από κάποια στην άλλη.

ΕΥ:

- Για k πόλεις ισχύει κι έστω έχω $k+1$ πόλεις.
- Αφαιρώ πόλη w που δεν την δείχνουν όλες οι πόλεις.
- Στις k που μένουν υπάρχει ευκολα προσβάσιμη πόλη z
- $x \in A$ πάει z απευθείας. $x \in \bar{A}$ δεν πάει απευθείας.
- $\forall x \in \bar{A}$, $\exists y \in A$ τέτοιο ώστε x πάει y.
- Αν w πάει z ή x, με $x \in A$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
- Αλλιώς, z πάει w και $\forall x \in A$, x πάει w.
- $\forall y \in \bar{A}$, $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε y πάει x (πάει w).

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2}\log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2}\log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2}\log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:

- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x$.
- $\frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x \leq \frac{x+y}{2}\log(x+y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x+\delta}{2}\log(x+\delta) + x - \frac{2x+\delta}{2}\log(2x+\delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2} \log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2} \log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2} \log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:
- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k+1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x$.
- $\frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x \leq \frac{x+y}{2} \log(x+y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2} \log x + \frac{x+\delta}{2} \log(x+\delta) + x - \frac{2x+\delta}{2} \log(2x+\delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2}\log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2}\log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2}\log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:

- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k+1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x$.
- $\frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x \leq \frac{x+y}{2}\log(x+y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x+\delta}{2}\log(x+\delta) + x - \frac{2x+\delta}{2}\log(2x+\delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2}\log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2}\log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2}\log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:
- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x$.
- $\frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x \leq \frac{x+y}{2}\log(x+y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x+\delta}{2}\log(x+\delta) + x - \frac{2x+\delta}{2}\log(2x+\delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2}\log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2}\log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2}\log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:
- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k+1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x$.
- $\frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x \leq \frac{x+y}{2}\log(x+y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x+\delta}{2}\log(x+\delta) + x - \frac{2x+\delta}{2}\log(2x+\delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2} \log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2} \log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2} \log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:

- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x$.
- $\frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x \leq \frac{x+y}{2} \log(x + y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2} \log x + \frac{x+\delta}{2} \log(x + \delta) + x - \frac{2x+\delta}{2} \log(2x + \delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2} \log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2} \log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2} \log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:
- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x$.
- $\frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x \leq \frac{x+y}{2} \log(x + y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2} \log x + \frac{x+\delta}{2} \log(x + \delta) + x - \frac{2x+\delta}{2} \log(2x + \delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2}\log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2}\log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2}\log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:

- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x$.
- $\frac{x}{2}\log x + \frac{y}{2}\log y + x \leq \frac{x+y}{2}\log(x + y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x+\delta}{2}\log(x + \delta) + x - \frac{2x+\delta}{2}\log(2x + \delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Θέμα 6(β)

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2} \log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2} \log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2} \log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:
- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x$.
- $\frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x \leq \frac{x+y}{2} \log(x + y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2} \log x + \frac{x+\delta}{2} \log(x + \delta) + x - \frac{2x+\delta}{2} \log(2x + \delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.

Έστω $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο $n \geq 1$ διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους $k \geq 1$. Να δείξετε ότι το S περιέχει το πολύ $\frac{n}{2} \log_2 n$ (μη διατεταγμένα) ζευγάρια διαφορετικών συμβολοσειρών που διαφέρουν μεταξύ τους σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος των συμβολοσειρών:

Βάση: για $k = 1$, υπάρχουν $0 \leq \frac{1}{2} \log_2 1$ ζεύγη για $n = 1$ και $1 \leq \frac{2}{2} \log_2 2$ ζεύγος για $n = 2$.

ΕΥ:

- Για μήκος k ισχύει το φράγμα και κοιτάμε για $k + 1$.
- Διαμερίζω: $a \in X$ ξεκινά με 0, $a \in Y$ ξεκινά με 1.
- Έστω $x = |X|$, $y = |Y|$ και χ.β.τ.γ. $x \leq y$.
- Πλήθος ζευγών $\leq \frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x$.
- $\frac{x}{2} \log x + \frac{y}{2} \log y + x \leq \frac{x+y}{2} \log(x + y)$.
- $f(x) = \frac{x}{2} \log x + \frac{x+\delta}{2} \log(x + \delta) + x - \frac{2x+\delta}{2} \log(2x + \delta)$.
- Η f είναι φθίνουσα και $f(1) \leq 0$.