Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))] \rightarrow \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Λύση. (1) Έστω ερμηνεία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένο (μη-κενό) σύμπαν A. Παρατηρούμε ότι λόγω της υπόθεσης, η πρόταση φ αφορά σε σχέσεις P με τις παρακάτω ιδιότητες: (i) ανακλαστική ιδιότητα, $\forall x P(x,x)$, (ii) μεταβατική ιδιότητα, $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$, και (iii) ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων, κάποιο σχετίζεται με το άλλο, $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$ (στην συνέχεια, θα αναφερόμαστε σε αυτή την ιδιότητα ως Ιδ3, χάριν συντομίας). Αν η σχέση P δεν έχει κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$, τότε η φ αληθεύει τετριμμένα, ως συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση. Αν η σχέση P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, τότε η φ αληθεύει ανν υπάρχει στοιχείο του A που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του $|A|$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, εστιάζουμε στην περίπτωση που η P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$.
Βάση της επαγωγής: Έστω $|A| = 1$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A. Αν η P είναι ανακλαστική, το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Διαφορετικά, η φ αληθεύει γιατί έχει ψευδή υπόθεση. Άρα η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$.
Επαγωγική Υπόθεση: Για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$, θεωρούμε σύμπαν $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A, και υποθέτουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι αν η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.
Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε σύμπαν $A' = A \cup \{\alpha_{n+1}\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A'. Θα δείξουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}'$ (διαφορετικά η φ αληθεύει επειδή έχει ψευδή υπόθεση). Παρατηρούμε ότι η P διατηρεί αυτές τις ιδιότητες αν περιορίσουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A (δηλ. αν αγνοήσουμε προσωρινά το στοιχείο α_{n+1}). Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Για να εξετάσουμε την τιμή αλήθειας της φ στην $\mathcal{A}'$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$, τότε το στοιχείο α P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ δεν αληθεύει, πρέπει λόγω της Ιδ3, να αληθεύει ότι $P(\alpha_{n+1}, \alpha)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το στοιχείο α P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Άρα, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Επιπλέον, λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας, το α_{n+1} P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Άρα το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Συνεπώς η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$.

(2) Εφόσον όλες οι ερμηνείες με πεπερασμένο σύμπαν είναι μοντέλα της φ, πρέπει να εξετάσουμε ερμηνείες με άπειρο σύμπαν. Έστω ότι το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με την σχέση "μεγαλύτερο ή ίσο" (δηλ. το $P(x, y)$ αληθεύει ανν $x \geq y$). Σε αυτή την ερμηνεία, η σχέση P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3. Όμως, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των φυσικών (το σύνολο των φυσικών αριθμών εκτείνεται στο άπειρο, δεν είναι φραγμένο άνω). Επομένως η φ δεν αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία. □

Άσκηση 2 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.

Λύση. (1) Η σχέση R είναι *ανακλαστική* γιατί για κάθε $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, $a_k \leq a_k$ και $k \leq k$, άρα $((a_k, k), (a_k, k)) \in R$. Η σχέση R είναι *μεταβατική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)), ((a_\ell, \ell), (a_j, j)) \in R$, έχουμε ότι $a_k \leq a_\ell \leq a_j$ και ότι $k \leq \ell \leq j$, και συνεπώς $((a_k, k), (a_j, j)) \in R$. Η σχέση R είναι *αντισυμμετρική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ με $k \neq \ell$, έχουμε ότι $((a_\ell, \ell), (a_k, k)) \notin R$, γιατί $\ell > k$. Άρα η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.
(2) Κάθε αλυσίδα μήκους m της R αντιστοιχεί σε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Πράγματι, τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αλυσίδα μήκους m της R ανν (λόγω του ορισμού της R) $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \cdots \leq a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ αποτελεί μια αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους m της R αντιστοιχεί σε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αν τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αντιαλυσίδα της R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ (δηλ. απαριθμούμε τα στοιχεία της αντιαλυσίδας σε αύξουσα σειρά των δεικτών τους). Επομένως τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$, αποτελούν μια αντιαλυσίδα μεγέθους m της R ανν $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και (λόγω του ορισμού της R) $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ αποτελεί μια φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$.
(3) Αποτελεί άμεση συνέπεια του (2) και του ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) είτε περιέχει μια αλυσίδα μήκους n είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους n. □

Άσκηση 3 (Γραφήματα). Να δείξετε ότι το συμπληρωματικό κάθε μη συνεκτικού γραφήματος είναι συνεκτικό.

Λύση. Έστω μη συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ και έστω u, w δύο οποιεσδήποτε κορυφές του G. Θα πρέπει να δείξω ότι στο συμπληρωματικό γράφημα του G, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των u και w. Αφού το G είναι μη συνεκτικό, θα αποτελείται τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Οι κορυφές u και w ανήκουν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα. Τότε η ακμή $\{u, w\}$ δεν υπάρχει στο γράφημα G (αλλιώς οι δύο κορυφές δεν θα ήταν σε διαφορετικές, αλλά στην ίδια συνεκτική συνιστώσα). Επομένως η ακμή $\{u, w\}$ υπάρχει στο συμπληρωματικό γράφημα του G.

Περίπτωση 2. Οι κορυφές u και w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Έστω κορυφή v που ανήκει σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από αυτή που ανήκουν οι u και w. Παρατηρώ ότι πάντα υπάρχει μια τέτοια κορυφή v διότι το G είναι μη συνεκτικό γράφημα. Όπως και στην Περίπτωση 1, οι ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ δεν υπάρχουν στο G, και επομένως υπάρχουν στο συμπληρωματικό γράφημα του G. Συνεπώς, στο συμπληρωματικό γράφημα, οι κορυφές u και w συνδέονται μέσω του μονοπατιού $u - v - w$. □

Άσκηση 4 (Γραφήματα). Να αποδείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές δεν έχει κύκλο Euler και έχει κύκλο Hamilton.

Λύση. Το πλήρες γράφημα με 11 κορυφές έχει 55 ακμές. Συνεπώς, κάθε απλό γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές προκύπτει από το K_{11} με την αφαίρεση δύο ακμών. Για να αποκλείσω την ύπαρξη κύκλου Euler, χρειάζεται να διακρίνω δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν στην ίδια κορυφή. Αφού το γράφημα είναι απλό, οι δύο ακμές μπορούν να έχουν μόνο το ένα άκρο τους κοινό. Συνεπώς, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές έχει μία κορυφή βαθμού 8, δύο κορυφές βαθμού 9, και 8 κορυφές με βαθμό 10. Συνεπώς, δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler, αφού περιέχει κάποιες κορυφές με περιττό βαθμό.

Περίπτωση 2. Διαφορετικά, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές πρέπει να έχει 4 κορυφές βαθμού 9 και 7 κορυφές βαθμού 10. Και σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler.

Και στις δύο περιπτώσεις, η ύπαρξη κύκλου Hamilton προκύπτει άμεσα, με εφαρμογή του Θεωρήματος του Dirac. □

Άσκηση 5 (Γραφήματα). Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να περιέχει ένα απλό διμερές γράφημα με n κορυφές.

Λύση. Προφανώς το πλήθος ακμών μεγιστοποιείται στο πλήρες γράφημα. Αφού όλες οι κορυφές είναι n, αν το ένα σύνολο ανεξάρτητο κορυφών περιέχει k κορυφές, το δεύτερο θα περιέχει $n - k$. Ο συνολικός αριθμός ακμών του $K_{k,n-k}$ είναι $k(n - k)$. Η ποσότητα αυτή μεγιστοποιείται για $k = n/2$, αν το n είναι άρτιος, και για $k = (n - 1)/2$, αν το n είναι περιττός. Συνεπώς, αν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $n^2/4$, ενώ αν το n είναι περιττός, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $(n^2 - 1)/4$. Παρατηρήστε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι πάντα ακέραιοι. □

Άσκηση 6 (Γραφήματα). Να χαρακτηρίσετε την κλάση των γραφημάτων στα οποία κάθε κύκλος Euler είναι και κύκλος Hamilton.

Λύση. Ένας κύκλος ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton πρέπει να διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Hamilton) και από κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Euler). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος C_n με n κορυφές και n ακμές.

Συγκεκριμένα, αν το γράφημα περιείχε $n + 1$ ή περισσότερες ακμές, ο κύκλος Euler δεν θα ήταν κύκλος Hamilton (θα περιείχε περισσότερες από n ακμές και συνεπώς θα διερχόταν από κάποια κορυφή περισσότερες από μία φορές). Αν το γράφημα περιείχε $n - 1$ ή λιγότερες ακμές, είτε δεν θα περιείχε κανένα κύκλο (θα ήταν δέντρο) είτε δεν θα ήταν συνεκτικό. Και στις δύο περιπτώσεις, το γράφημα δεν θα είχε ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. Τέλος, το C_n είναι το μοναδικό γράφημα με n κορυφές και n ακμές που περιέχει κύκλο Euler ή / και κύκλο Hamilton.

Για το αντίστροφο, είναι προφανές ότι το C_n περιέχει ακριβώς έναν κύκλο ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton. □

Άσκηση 7 (Γραφηματικές Ακολουθίες). Η *ακολουθία βαθμών* (degree sequence) ενός γραφήματος είναι η ακολουθία των βαθμών των κορυφών του, συνήθως σε φθίνουσα σειρά. Μια ακολουθία $n \geq 1$ φυσικών αριθμών ονομάζεται *γραφηματική* (graphic sequence) αν αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός *απλού* μη κατευθυνόμενου γραφήματος n κορυφών. Η μοναδική γραφηματική ακολουθία με ένα στοιχείο είναι η $d_1 = 0$.

Να δείξετε ότι μια ακολουθία $n > 1$ φυσικών $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$, είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία $\boldsymbol{d'}$ που προκύπτει από την $\boldsymbol{d}$ αν αφαιρέσουμε το μεγαλύτερο στοιχείο d_1 και μειώσουμε τα d_1 επόμενα μεγαλύτερα στοιχεία της $\boldsymbol{d}$ κατά 1 είναι επίσης γραφηματική.

Λύση. Έστω $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$, ακολουθία $n > 1$ φυσικών αριθμών, και έστω $\boldsymbol{d'}$ η ακολουθία που προκύπτει από την $\boldsymbol{d}$ αν αφαιρέσουμε το d_1 και μειώσουμε τα d_1 επόμενα μεγαλύτερα στοιχεία $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$ της κατά 1. Πρέπει βέβαια $d_1 \leq n-1$, διαφορετικά η $\boldsymbol{d'}$ δεν θα ήταν καλώς ορισμένη.

Θα δείξουμε πρώτα ότι η συνθήκη είναι ικανή. Έστω ότι η ακολουθία $\boldsymbol{d'}$ είναι γραφηματική, και έστω G' απλό γράφημα με $n-1$ κορυφές που έχει ως ακολουθία βαθμών την $\boldsymbol{d'}$. Αν προσθέσουμε στο G' μια νέα κορυφή βαθμού d_1 και την συνδέσουμε με τις d_1 κορυφές του G' που έχουν βαθμό $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1$, προκύπτει ένα απλό γράφημα G με n κορυφές που έχει ως ακολουθία βαθμών την $\boldsymbol{d}$. Άρα και η $\boldsymbol{d}$ είναι γραφηματική.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η συνθήκη είναι αναγκαία. Έστω ότι η ακολουθία $\boldsymbol{d}$ είναι γραφηματική, και έστω G απλό γράφημα με n κορυφές που έχει ως ακολουθία βαθμών την $\boldsymbol{d}$. Θεωρούμε κορυφή v του G με βαθμό d_1. Έστω $N(v)$ το σύνολο των γειτόνων της v στο G, και έστω S σύνολο d_1 κορυφών του G με (τους επιθυμητούς) βαθμούς $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$ αντίστοιχα (αν υπάρχουν πολλά τέτοια σύνολα, επιλέγουμε αυτό με το μέγιστο πλήθος κορυφών του $N(v)$). Αν $N(v) = S$, αφαιρώντας την v από το G προκύπτει απλό γράφημα G' με $n-1$ κορυφές που έχει ως ακολουθία βαθμών την $\boldsymbol{d'}$.

Αν $N(v) \neq S$, θα τροποποιήσουμε το G ώστε να αυξήσουμε το πλήθος των κορυφών του S που ανήκουν στο $N(v)$, δηλ. το $|N(v) \cap S|$, χωρίς να μεταβάλουμε τον βαθμό καμία κορυφής. Θεωρούμε κορυφές $x \in S \setminus N(v)$ και $y \in N(v) \setminus S$. Αφού ο βαθμός της x είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό της y (επειδή η y είναι γείτονας της v αλλά δεν ανήκει στο S), υπάρχει κορυφή z που συνδέεται με την x αλλά όχι με την y. Τροποποιούμε το G αντικαθιστώντας την ακμή $\{z, x\}$ με την ακμή $\{v, x\}$ και την ακμή $\{v, y\}$ με την ακμή $\{z, y\}$. Οι βαθμοί των εμπλεκόμενων κορυφών δεν αλλάζουν και το γράφημα που προκύπτει είναι απλό. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία όσες φορές χρειαστεί και καταλήγουμε σε ένα απλό γράφημα $\hat{G}$ με n κορυφές και ακολουθία βαθμών $\boldsymbol{d}$, όπου η κορυφή μέγιστου βαθμού v έχει $N(v) = S$. Αφαιρώντας την v από το $\hat{G}$ προκύπτει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών $\boldsymbol{d'}$. □

Άσκηση 8 (Διαχωριστές Δέντρων). Σε ένα δένδρο χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται $1/k$-διαχωριστής αν μετά την αφαίρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν το πολύ n/k κόμβους, όπου n ο αρχικός αριθμός των κόμβων του δένδρου.

(α) Να δείξετε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει $1/2$-διαχωριστής.

(β) Να δείξετε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει $1/k$-διαχωριστής ($k < n$), τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

(α) Θα δείξουμε στο ερώτημα αυτό ότι κάθε δέντρο έχει $\frac{1}{2}$-διαχωριστή. Για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για δέντρο μεγέθους 2, έχουμε τετριμμένη περίπτωση και βλέπουμε ότι και οι δύο κορυφές είναι $\frac{1}{2}$-διαχωριστές για το δέντρο.

Έστω τώρα ότι υποθέτουμε ότι κάθε δέντρο T' μεγέθους n έχει $\frac{1}{2}$-διαχωριστή. Θα δείξουμε ότι και κάθε δέντρο μεγέθους $n+1$ έχει $\frac{1}{2}$-διαχωριστή. Έστω δέντρο μεγέθους $n+1$ (το ονομάζουμε T)

από το οποίο αφαιρούμε ένα φύλλο ℓ, οπότε προκύπτει ένα δέντρο μεγέθους n, ας το ονομάσουμε αυτό T'. Έστω επίσης ότι ο $\frac{1}{2}$-διαχωριστής του δέντρου T' είναι ο κόμβος u. Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Μετά την προσθήκη του φύλλου ℓ, ο u παραμένει $\frac{1}{2}$-διαχωριστής για το T.
- Μετά την προσθήκη του φύλλου ℓ, ο u δεν είναι $\frac{1}{2}$-διαχωριστής για το T. Αυτό συμβαίνει γιατί το ℓ προστίθεται στη μεγαλύτερη συνεκτική συνιστώσα του $T' - \{u\}$ η οποία έχει $n/2$ κορυφές (και άρα το συνολικό πλήθος των κορυφών στις άλλες συνεκτικές συνιστώσες του $T' - \{u\}$ είναι το πολύ $(n-1)/2$). Τότε ο γείτονας του u στην συνεκτική συνιστώσα όπου προστέθηκε το φύλλο ℓ αποτελεί $\frac{1}{2}$-διαχωριστή του T.

(β) Έστω ότι κάποιο δέντρο έχει $\frac{1}{k}$-διαχωριστή. Θα δείξουμε ότι στο δέντρο υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k. Πράγματι, έστω ότι μετά την αφαίρεση του $\frac{1}{k}$-διαχωριστή υπάρχουν m συνεκτικές συνιστώσες, η καθεμία με το πολύ n/k κορυφές. Αφού ο συνολικός αριθμός των κορυφών στις συνεκτικές συνιστώσες είναι $n-1$, πρέπει $m \geq k$. Για να προκύψουν όμως τόσες συνεκτικές συνιστώσες, πρέπει ο κόμβος που αφαιρείται να έχει αντίστοιχα μεγάλο βαθμό.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ένα αντιπαράδειγμα δέντρου που έχει κορυφή βαθμού 3, αλλά όχι και $\frac{1}{3}$-διαχωριστή φαίνεται προκύπτει αν στο μονοπάτι P_n, για $n \geq 5$, προσθέσουμε ένα ακόμη φύλλο στην γειτονική κορυφή ενός από τα άκρα του. Έτσι έχουμε ένα δέντρο ύψους $n-1$ με τρία φύλλα, τα δύο από τα οποία έχουν κοινό πατέρα. □

Άσκηση 9 (Διάβαση του Ποταμού). (α) Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας λύκος, ένα πρόβατο κι ένα καφάσι με μαρούλια. Υπάρχει μόνο μια βάρκα, η οποία εκτός από το βαρκάρη μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα από τα προηγούμενα φορτία κάθε φορά. Όταν ο βαρκάρης είναι παρών τότε επικρατεί ηρεμία. Αλλά όταν ο βαρκάρης απουσιάζει, κάποια από τα παραπάνω μπορούν το ένα να φάει το άλλο. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

- Αν ο λύκος και το πρόβατο μείνουν αφύλακτα στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το καφάσι με τα μαρούλια, ο λύκος μπορεί να φάει το πρόβατο.
- Αν το πρόβατο μείνει αφύλακτο μαζί με τα μαρούλια στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το λύκο, το πρόβατο θα φάει τα μαρούλια.

Περιγράψτε έναν τρόπο για να μεταφέρει ο βαρκάρης και τα τρία φορτία άθικτα στην απέναντι όχθη.

(β) Γενικεύοντας, έστω ότι υπάρχουν n αντικείμενα $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ τα οποία ο βαρκάρης επιθυμεί να περάσει στην απέναντι όχθη. Δίνεται γι' αυτά ένα γράφημα ασυμβατοτήτων, του οποίου οι κορυφές είναι τα n αντικείμενα και το x_i συνδέεται με το x_j όταν τα x_i και x_j δεν επιτρέπεται να μείνουν αφύλακτα μαζί στην ίδια όχθη (δηλαδή όταν κάποιο από τα δύο μπορεί να φάει το άλλο).

Βρείτε ποια είναι η ελάχιστη χωρητικότητα της βάρκας ώστε το πρόβλημα να λύνεται όταν το γράφημα ασυμβατοτήτων είναι:

- Το απλό μονοπάτι P_n
- Ο κύκλος C_n
- Ο αστέρας S_n

Πόσες φορές πρέπει ο βαρκάρης να διασχίσει τον ποταμό σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Λύση. (α) Η απάντηση προκύπτει ως ειδική περίπτωση του (β).

(β) Παρατηρούμε ότι όταν ο βαρκάρης μετακινεί κάποια αντικείμενα στην άλλη μεριά μιας όχθης, τα αντικείμενα που μένουν στη μια όχθη θα πρέπει να είναι ασύμβατα μεταξύ τους, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος. Συνεπώς, κάθε φορά θα πρέπει να απομακρύνεται ένα σύνολο κορυφών, ώστε οι κορυφές που απομένουν να μην έχουν καμία ακμή μεταξύ τους (δηλ. να αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο). Για τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε (στη χωρητικότητα της βάρκας δεν προσμετρούμε τον βαρκάρη):

Μονοπάτι P_n**.** Έστω ότι έχουμε το μονοπάτι $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Αν το n είναι άρτιος αριθμός, ο βαρκάρης μπορεί να μεταφέρει όλα τα αντικείμενα με βάρκα χωρητικότητας $n/2$ με 3 διαδρομές: μεταφέρει πρώτα τα μισά (π.χ. τις κορυφές με περιττό δείκτη), γυρίζει μόνος του, και στη συνέχεια μεταφέρει τα υπόλοιπα.

Όταν το n είναι περιττό, θα χρειαστεί βάρκα χωρητικότητας $(n-1)/2$ και 7 διαδρομές συνολικά: μεταφέρει πρώτα τα $x_2, x_4, \ldots x_{n-1}$, επιστρέφει μόνος του, μεταφέρει το αντικείμενο x_1, παίρνει όλα τα "άρτια" αντικείμενα μαζί του στην αριστερή όχθη, μετά μεταφέρει τα $x_3, x_5, \ldots, x_n$ στη δεξιά όχθη, επιστρέφει, και τελικά μεταφέρει όλα τα "άρτια" αντικείμενα και πάλι στη δεξιά όχθη.

Κύκλος C_n**.** Η περίπτωση του κύκλου είναι παρόμοια με την περίπτωση του μονοπατιού. Αν το n είναι άρτιο, κάνουμε ότι και στην περίπτωση του μονοπατιού άρτιου μήκους. Αν το n είναι περιττό, η βάρκα πρέπει να έχει χωρητικότητα $(n+1)/2$.

Αστέρας S_n**.** Χρειάζονται $2n-3$ διαδρομές με βάρκα χωρητικότητας 2. Το "κεντρικό" αντικείμενο είναι μόνιμα φορτωμένο στη βάρκα, και κάθε φορά μεταφέρεται ένα "περιφερειακό" αντικείμενο.

□