



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτά Μαθηματικά
Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
4η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1. (α) 75 παιδιά πήγαν σε ένα πάρκο διασκέδασης, όπου μπορούν να συμμετέχουν σε τρία παιχνίδια. Είναι γνωστό ότι 20 από αυτά συμμετείχαν και στα τρία παιχνίδια, και ότι 55 από αυτά συμμετείχαν τουλάχιστον σε δύο από τα τρία παιχνίδια. Η συμμετοχή σε κάθε παιχνίδι κοστίζει 1 ευρώ, και η συνολική είσπραξη ήταν 140 ευρώ. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των παιδιών που δεν συμμετείχαν σε κανένα παιχνίδι.

(β) Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, να υπολογίσετε το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 120.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και διαιρούνται από το 4, αλλά δεν διαιρούνται από το 5 και το 6.

Άσκηση 2. (α) Έχουμε 4 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να γεμίσει ένα ράφι που έχει μήκος 1 μέτρο, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι.

(β) Έχουμε στη διάθεσή μας 10 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 2 μέτρων το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.

Άσκηση 3. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να καθήσουν 20 (διακεκριμένοι) φοιτητές σε μια σειρά 90 θρανίων, ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον δύο κενά θρανία ανάμεσα σε κάθε δύο φοιτητές.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 30 ίδια κουπόνια σίτισης σε 5 φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 10 κουπόνια.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να κατανεύσουμε 40 φοιτητές σε 4 διαφορετικά εστιατόρια ώστε κανένα εστιατόριο να μην μείνει άδειο, αν η κατανομή καθορίζει και τη σειρά με την οποία οι φοιτητές γευματίζουν.

Άσκηση 4. Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 10 ζευγάρια παπουτσιών (κάθε ζευγάρι αποτελείται από ένα δεξί και από ένα αριστερό παπούτσι, και κάθε ζευγάρι είναι διαφορετικό από οποιοδήποτε άλλο). Αν επιλέξουμε τυχαία 8 παπούτσια, ποια η πιθανότητα να μην επιλέξουμε κανένα ζευγάρι παπουτσιών και ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα ακριβώς ζευγάρι παπουτσιών;

Άσκηση 5. Έχουμε n θέσεις στις οποίες θα καθήσουν $k + m$ καλεσμένοι, k (διακεκριμένοι) άνδρες και m (διακεκριμένες) γυναίκες, $n \geq \max\{k + m, 2k\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν οι καλεσμένοι αν δεν μπορούν να κάθονται άνδρες σε διπλάνες θέσεις (δηλ. ανάμεσα σε δύο άνδρες πρέπει να μεσολαβεί τουλάχιστον μία θέση που είτε είναι κενή είτε καταλαμβάνεται από γυναίκα) αν:

1. οι καλεσμένοι κάθονται σε μία σειρά;
2. οι καλεσμένοι κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι; Να θεωρήσετε ως διαφορετικά τα ενδεχόμενα ο Α να κάθεται δεξιά του Β και ο Α να κάθεται αριστερά του Β.