| | |
|---|---|
| | **ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**<br>ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ<br>**ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**<br>Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Θ. Λιανέας<br>**2η Γραπτή Εργασία** |

**Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)**

α) Σε ένα διάστημα 120 ημερών, μία αεροσυνοδός κάνει τουλάχιστον ένα ταξίδι κάθε ημέρα, και όχι περισσότερα από 180 ταξίδια συνολικά. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα διάστημα (αποτελούμενο από διαδοχικές ημέρες) όπου η αεροσυνοδός κάνει ακριβώς 59 ταξίδια.

Έστω $a_j$ το πλήθος των ταξιδιών που κάνει η αεροσυνοδός μέχρι την $j$ ημέρα.
Σχηματίζω μία ακολουθία που αποτελείται από τα $a_j$. Την $a_1, a_2, a_3, ..., a_{120}$.
Ισχύει πως $\forall a_j\ j = 1,2,...,120\ \ 1 \le a_j \le 180$. Ισχύει επίσης πως κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι ίσος με τον άλλον.
Σχηματίζω επίσης μία νέα ακολουθία με όρους $b_i = a_i + 59$. Γι'αυτήν ισχύει πως $1+59 \le b_j \le 180+59 \Rightarrow 60 \le b_j \le 239$. Και εδώ ισχύει πως κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι ίσος με τον άλλον.
Παίρνω τους όρους και των δύο ακολουθιών "Περιστέρια" και τους βάζω σε 239 "Φωλιές" ανάλογα με την τιμή τους. Εφόσσον οι όροι και των δύο ακολουθιών έχουν τιμές $\le 240$ δύο τουλάχιστον όροι ένας από κάθε ακολουθία θα πέσουν στην ίδια "Φωλιά". Και θα ισχύει $a_k = a_l + 59$.

β) Θεωρούμε μια ακολουθία θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ. στην ακολουθία 7,5,3,5,7,5,3,7, να δείξετε το γινόμενο των έξι τελευταίων θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Αρκεί να αποδείξουμε πως υπάρχουν διαδοχικές θέσεις στην ακολουθία που το κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα σε αυτές επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών.
Μετρούμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας έως τη θέση που βρισκόμαστε και συμπληρώνουμε στο διάνυσμα των εμφανίσεων των στοιχείων την τιμή 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων του στοιχείου είναι περιττό και 0 αν είναι άρτιο.
Όλοι αυτοί οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί είναι $2^n$ ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 έως $2^n$ άρα $2^n + 1$.
Αυτό σημαίνει πως κάποιος συνδυασμός επαναλαμβάνεται. Στις θέσεις αυτές υπάρχει τέλειο τετράγωνο. Για το παράδειγμα που μας δίνετε: 7,5,3,5,7,5,3,7
Στην αρχή δεν έχει έρθει κανένα στοιχείο.
Άρα το διάνυσμα θα είναι $(0,0,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,0,1)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,1)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,1)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,0)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,0)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Το διάνυσμα $(0,1,1)$ εμφανίζεται δύο φορές.

**Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 1.5 μονάδες)**

α) Έστω ένα γράφημα $G$ με $n \geq 3$ κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $(n/2)+1$. Να δειχθεί ότι το $G$ περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους $3$).

Έστω κορυφές $u$ και $v$ που συνδέονται με ακμή. Θα δείξουμε ότι έχουν κοινό γείτονα $w$ επομένως σχηματίζεται τρίγωνο. Έστω ότι δεν έχουν. Επομένως η κάθε μια έχει $(n/2)+1$ διαφορετικούς γείτονες. Και οι συνολικές κορυφές του γραφήματος θα ήταν $n+1$ (η $u$, η $v$, οι $(n/2)+1-1$ γείτονες της $u$ εκτός της $v$ και οι $(n/2)+1-1$ γείτονες της $v$ εκτός της $u$). Άτοπο.

β) Σε ένα επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό $5$ ή $6$ δείξτε ότι
1. Αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3 τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5 και
2. Αν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ακριβώς 3 τότε υπάρχουν ακριβώς 12 όψεις βαθμού 5.

Συμβολίζουμε με $f$ το πλήθος των όψεων με $f_5$ το πλήθος των όψεων βαθμού 5 και $f_6$ το πλήθος των όψεων βαθμού 6 και με $k$ το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.

1. Ισχύει πως $k=1$ (θεωρούμε συνεκτικό γράφημα) και $2m \geq 3n$ (βαθμός κορυφής τουλάχιστον 3)

$$2m = 5f_5 + 6f_6 \Rightarrow 2m = 5f_5 + 6(f - f_6) \Rightarrow 2m = 6f - f_5 \Rightarrow 2m = 6(m+k+1-n) - f_5$$
$$\Rightarrow f_5 = 6 + 6k + 2(2m-3n) \Rightarrow f_5 \geq 6 + 6*1 + 2(2m-3n) \Rightarrow f_5 \geq 6 + 6 + 2(2m-3n) \geq 12$$

2. Ισχύει πως $2m = 3n$ και συνεκτικό γράφημα. Επομένως $f_5 = 12$

γ) Να αποδειχθεί πως αν τρία μονοπάτια $P_1, P_2, P_3$ ενός δέντρου είναι ανά δύο τεμνόμενα (δηλαδή κάθε δύο από αυτά έχουν μια κοινή κορυφή) τότε υπάρχει μια κορυφή του $T$ που να ανήκει ταυτόχρονα και στα τρία.

Συμβολίζουμε με $u$ την τομή των $P_1$ και $P_2$, με $v$ την τομή των $P_2$ και $P_3$ και $w$ την τομή των $P_1$ και $P_3$. Αν τα $u$, $v$, $w$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε θα σχηματιζόταν κύκλος $u \to \ldots \to v \to \ldots \to w \to \ldots \to u$. Άτοπο γιατί πρόκειται για δέντρο. Έστω δύο από τα $u$, $v$, $w$ ταυτίζονται. Χ.Β.Γ θεωρούμε πως αυτά είναι τα $u$ και $v$. Τότε τα τρία μονοπάτια έχουν κοινή κορυφή την $u \equiv v$.

**Θέμα 3 (Διμερή γραφήματα, 1.8 μονάδες)**

α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V,E)$ υπάρχει μία μοναδική διαμέριση των κορυφών του $V$ σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το $G$ έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(α) Το $G$ είναι διμερές γράφημα και κατά συνέπεια υπάρχει μία διαμέριση των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Θα δείξουμε πως είναι μοναδική. Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα, επομένως υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών. Κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο συνδέεται με μονοπάτι άρτιου μήκους ενώ αν ανήκει σε διαφορετικό συνδέεται με μονοπάτι περιττού μήκους. Επομένως κάθε ζεύγος κορυφών θα συνδέεται με 2 διαφορετικά μονοπάτια και θα είχα κύκλο περιττού μήκους. Άτοπο για διμερές γράφημα. Αν το γράφημα έχει $k$ συνεκτικές συνιστώσες και η κάθε μία από αυτές δίνει τις διαμερίσεις $(A_1,B_1),(A_2,B_2),\ldots,(A_k,B_k)$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα έχουμε 2 επιλογές για να εισάγουμε τα ανεξάρτητα σύνολα στη τελική διαμέριση. Επομένως έχουμε $2^k$ διαμερίσεις και επειδή διπλομετράμε διαιρούμε με το $2$ και έχουμε $2^{k-1}$ διαφορετικές διαμερίσεις.

β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V,E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του $G$. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e=\{u,v\}$, διαγράφουμε την $e$ και προσθέτουμε μία νέα κορυφή $x_e$ που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα $u$ και $v$ της ακμής $e$. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το $G$ έχει $n$ κορυφές και $m$ ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα $G$ είναι ο κύκλος $C_n$ με $n$ κορυφές.

(β)(i) Το πλήθος των κορυφών του $Y(G)$ είναι το άθροισμα των αρχικών και των νέων (αυτές που προστέθηκαν είναι όσες και οι ακμές). Άρα το $Y(G)$ έχει $n+m$ κορυφές. Το πλήθος των ακμών του $Y(G)$ είναι διπλάσιο από το πλήθος των ακμών του αρχικού γραφήματος. Επομένως το $Y(G)$ έχει $2m$ ακμές. Οι κορυφές του γραφήματος $Y(G)$ μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Το ένα περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος $G$ και το άλλο όλες τις κορυφές που προστεθήκαν για την υποδιαίρεση των ακμών. Επομένως εκ κατασκευής το γράφημα $Y(G)$ είναι διμερές.

(ii) Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton ανν το $G$ είναι το γράφημα $C_n$.

*Ευθύ* $\Rightarrow$ *Αν $G$ είναι το γράφημα $C_n$ τότε το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton.*

Το $Y(G)$ σε αυτή την περίπτωση είναι το $C_{2n}$ και επομένως έχει κύκλο Hamilton.

*Αντίστροφο* $\Leftarrow$ *Αν $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton τότε το $G$ είναι το γράφημα $C_n$.*

Οι κορυφές του $G$ (πλήθους $n$) που είναι και κορυφές του $Y(G)$ έχουν τον ίδιο βαθμό και στα δύο γραφήματα. Δεδομένου πως το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές του θα πρέπει να έχουν βαθμό $\geq 2$. Για να είναι όμως το $G$ (συνεκτικό γράφημα) διαφορετικό του $C_n$ και θα πρέπει μία τουλάχιστον κορυφή να έχει βαθμό $>2$. Επομένως το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα πρέπει να είναι $>2n$. Οπότε έχουμε $2n < \sum_{u:\text{κορυφή του} G} \deg(u) = 2m \Rightarrow n < m$.

Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton και οι κορυφές του διαμερίζονται με μοναδικό τρόπο σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Τα δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων $n = m$. Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα το $G$ είναι το $C_n$.

**Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μονάδες)**

α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $G$ ώστε για κάθε κορυφή $u$, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της $u$ είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

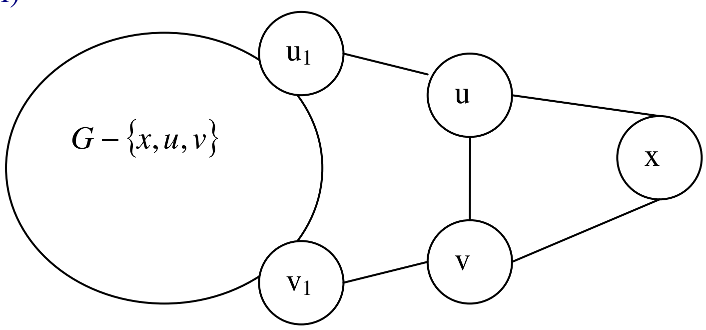
Εξετάζουμε 2 περιπτώσεις. Να περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού και να μην περιέχει.
Αν δεν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχει κύκλο Euler. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε ακμή που καταλήγει σε μια κορυφή υπάρχει και μια άλλη που απομακρύνεται από την κορυφή και επομένως το πλήθος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς την κορυφή ισούται με το πλήθος αυτών που έχουν κατεύθυνση από την κορυφή προς άλλη κορυφή. Σε αυτή την περίπτωση ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι.
Αν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού τότε αυτές είναι άρτιου πλήθους και μπορώ να τις "ζευγαρώσω". Για κάθε 2 τέτοιες κορυφές ζωγραφίζω μια ακμή. Στο νέο γράφημα που προκύπτει μπορώ να βρω κύκλο Euler και να ισχύει πως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν σβήσω αυτές τις ακμές κάθε τέτοια κορυφή θα έχει μία ακμή λιγότερη και επομένως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός διαφέρουν κατά ένα. Στις υπόλοιπες κορυφές (σε αυτές που στο αρχικό γράφημα ήταν άρτιου βαθμού) ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός είναι ίσοι.

β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G$ το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του $G$ μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Επομένως το $k/2$ είναι ακέραιος. Παίρνω μία κορυφή περιττού βαθμού και σχεδιάζοντας μία μονοκονδυλιά που ξεκινά από αυτή καταλήγω στην πρώτη κορυφή περιττού βαθμού που θα συναντήσω. Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό υπάρχει τέτοια μονοκονδυλιά. Διαγράφω τις ακμές της μονοκονδυλιάς και το γράφημα που απομένει αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες. Οι κορυφές περιττού βαθμού είναι τώρα $k-2$ διότι οι 2 πρώτες έχουν γίνει πλεόν άρτιου βαθμού. Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Ξεκινώ από συνιστώσα που έχει τουλάχιστον 2 κορυφές περιττού βαθμού και επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία. Εφόσσον οι κορυφές είναι $k$ η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί $k/2$ φορές. Οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχουν κύκλο Euler. Σχεδιάζω ένα τέτοιο κύκλο για κάθε συνιστώσα και τον συνδέω με μία μονοκονδυλιά. Δεδομένης της συνεκτικότητας του αρχικού γραφήματος μπορώ να το κάνω αυτό. Έτσι καμία ακμή δεν θα μείνει εκτός μονοκονδυλιάς και το σύνολο κορυφών του γραφήματος διαμερίζεται σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

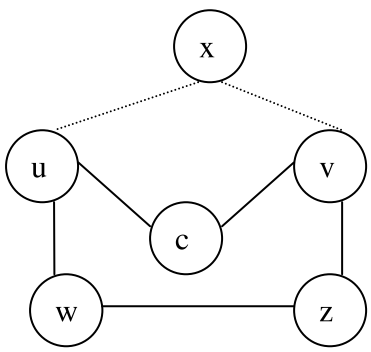
γ) Έστω γράφημα $G$ και έστω $x$ μια κορυφή του $G$ τέτοια ώστε το $G-x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το $G$ έχει δύο κορυφές $u$ και $v$ που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την $x$. (i) Να δείξετε ότι αν οι $u$ και $v$ συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το $G$ έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι $u$ και $v$ **δεν** συνδέονται μεταξύ τους, τότε το $G$ δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

(i)




Η κορυφή $u$ συνδέεεται με τον κύκλο Hamilton του γραφήματος $G-x$ μέσω των ακμών $u_1u$ και $uv$ (η τρίτη ακμή που προσπίπτει στην $u$ δεν ανήκει στο γράφημα). Επομένως ο κύκλος περνά διαδοχικά από τις ακμές $u_1uvv_1$. Μπορώ να φτιάξω τον ίδιο κύκλο με μόνη αλλαγή να μην περνά από την ακμή $uv$ και να παρεμβάλω την κορυφή $x$. Έτσι ο κύκλος θα φτάνει στην $u$ θα επισκέπτεται την $x$ και στη συνέχεια την $v$.

(ii) Στην περίπτωση που οι $u$ και $v$ δεν είναι γειτονικές δεν έχω απαραίτητα κύκλο Hamilton. Όπως για παράδειγμα το παρακάτω γράφημα. Αρχικά έχει κύκλο hamilton ενώ με την προσθήκη της $x$ δεν έχει.

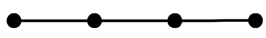


**Θέμα 5 (Ισομορφισμός 1.3 μον.)**

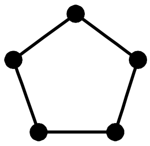
α) Να σχεδιάσετε όλα τα αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα με 7 κορυφές το πολύ.

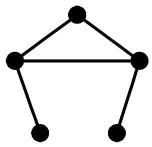
Αυτοσυμπληρωματικά υπάρχουν μόνο αν το $n$ ή το $n-1$ πολλαπλάσιο του 4.
Επομένως αυτοσυμπληρωματικά έχω μόνο για $n=1$, $n=4$, $n=5$.

Για $n=1$ έχω το γράφημα με μία κορυφή χωρίς ακμή.

Για $n=4$ έχω το μονοπάτι μήκους 3: 

Για $n=5$ έχω δύο:





β) Μεταξύ 1990 πληροφορικών, όπου καθένας συνεργάζεται με τουλάχιστον 1327 άλλους πληροφορικούς, δείξτε ότι υπάρχουν 4 πληροφορικοί οι οποίοι είναι ανά δύο συνεργάτες.

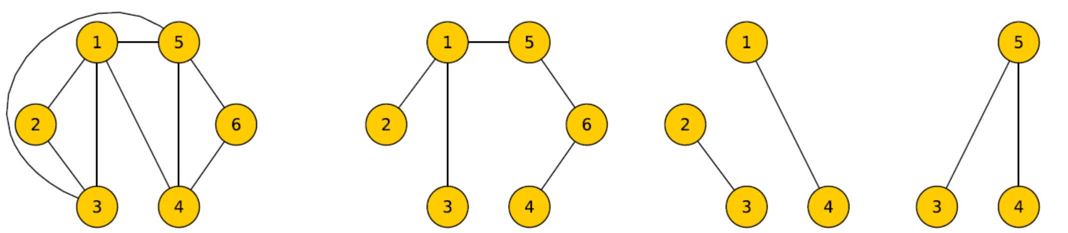
Έχουμε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 1990 κορυφές (οι πληροφορικοί) και ελάχιστο βαθμό κορυφής 1327 και αναζητούμε το πλήρες υπογράφημα 4 κορυφών (κλίκα $K_4$).
Έστω κορυφή Α με τουλάχιστον 1327 γειτονικές κορυφές. Έστω Β μία από αυτές. Η Β έχει επίσης 1327 γειτονικές κορυφές. Επομένως οι δύο κορυφές έχουν τουλάχιστον 1326 – (1988 -1326) =664 κοινούς γείτονες. Έστω Γ ένας από αυτούς. Τώρα οι κορυφές Α και Β έχουν πέρα από την κορυφή Γ τουλάχιστον 663 κοινές γειτονικές κορυφές. Η κορυφή Γ πέρα από τις Α και Β έχει **τουλάχιστον** 1325 ακόμη γείτονες. Επομένως **το πολύ** 1987-1325=662 κορυφές του γραφήματος δεν είναι γειτονικές της. Αλλά οι Α και Β έχουν πέρα από τη Γ τουλάχιστον 663 κοινές γειτονικές κορυφές. Αναγκαστικά απομένει 1 κορυφή γειτονική των Α και Β που θα είναι γειτονική και της Γ. Σχηματίστηκε έτσι η κλίκα $K_4$.

**Θέμα 6 (Επιπεδότητα, Χρωματικός αριθμός, 1.8 μονάδες)**

α) Έστω $G$ γράφημα που δεν είναι επίπεδο. Να αποδειχθεί πως $\Delta(G) \geq 3$ (μέγιστος βαθμός). Να αποδειχθεί επίσης πως δεν ισχύει το αντίστροφο.

Θα δείξουμε ότι αν $\Delta(G) < 3$ τότε το γράφημα είναι επίπεδο.
Εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος των ακμών.
Βάση: Για γραφήματα με 1 (ή 0) ακμές το γράφημα είναι επίπεδο.
Υπόθεση: Έστω τα γραφήματα με $k$ ακμές και $\Delta(G) < 3$ είναι επίπεδα.
Βήμα: Θα αποδείξουμε πως κάθε γράφημα με $k+1$ ακμές και $\Delta(G) < 3$ είναι επίπεδο.
Επιλέγω τυχαία 2 κορυφές βαθμού 1 ή 2 που συνδέονται με ακμή. Κάνω σύμπτυξη ακμής, συγχωνεύω δηλαδή τα δύο άκρα της ακμής σε μια καινούρια κορυφή που συνδέεται με όλους τους γείτονες των κορυφών της ακμής. Αυτοί θα είναι το πολύ δύο. Παίρνω έτσι γράφημα με $k$ ακμές και $\Delta(G) < 3$ το οποίο από επαγωγική υπόθεση είναι επίπεδο. Αν προσθέσω την ακμή που είχα συμπτύξει αρχικά το γράφημα παραμένει επίπεδο.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η κλίκα 4 κορυφών είναι επίπεδο γράφημα με $\Delta(G) = 3$.

β) Να αποδειχθεί πως κάθε επίπεδο γράφημα είναι η ένωση 5 δασών το πολύ. Η ένωση δύο γραφημάτων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι το γράφημα $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Στο σχήμα που ακολουθεί, το επίπεδο γράφημα στα αριστερά (A) είναι η ένωση των τριών δασών στα δεξιά (b,c και d).



(A) (b) (c) (d)

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος.
Για τη βάση της επαγωγής, κάθε γράφημα με το πολύ 5 κορυφές μπορεί να γραφτεί σαν ένωση 5 δέντρων: για κάθε κορυφή σχημάτισε το δέντρο με όλες τις ακμές της κορυφής.
Έστω για γράφημα με $k \geq 5$ κορυφές η υπόθεση ισχύει κι έστω επίπεδο γράφημα με $k+1$ κορυφές. Στο γράφημα αυτό υπάρχει κορυφή βαθμού το πολύ 5 αφού διαφορετικά οι συνολικές ακμές του θα ήταν $\frac{6n}{2} > 3n - 6$, που δεν μπορεί να ισχύει σε επίπεδα γραφήματα. Αν αφαιρέσουμε μια κορυφή $u$ με βαθμό το πολύ 5 τότε το (επίπεδο) γράφημα που μένει μπορεί να γραφτεί σαν ένωση 5 δασών. Προσθέτοντας σε κάθε δάσος την $u$ και μια ακμή της $u$ (διαφορετική ακμή για κάθε δάσος, αν είναι δυνατόν) παίρνουμε 5 δάση, η ένωση των οποίων μας δίνει το επίπεδο γράφημα των $k+1$ κορυφών.

γ) Να αποδειχθεί πως για κάθε γράφημα $G$ υπάρχει διαμέριση των κόμβων του σε δύο σύνολα $V_1$ και $V_2$ τέτοια ώστε για τα επαγόμενα υπογραφήματα $G_1$ και $G_2$ να ισχύει $\chi(G_1)+\chi(G_2)=\chi(G)$. Αν το γράφημα δεν είναι πλήρες τότε υπάρχει άλλη διαμέριση τέτοια ώστε $\chi(G_1)+\chi(G_2)>\chi(G)$.

Για την πρώτη διαμέριση:
Παίρνουμε έναν ελάχιστο χρωματισμό του γραφήματος. Αυτός χρησιμοποιεί τουλάχιστον δυο χρώματα a και b (υποθέτουμε πως υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή στο γράφημα, αλλιώς το ζητούμενο ισχύει μόνο για $V_1=V$ που δεν το θεωρούμε διαμέριση). Έστω $V_1$ οι κορυφές με το χρώμα a και $V_2=V\setminus V_1$. Είναι $\chi(G_1)=1$ και $\chi(G_2)\leq\chi(G)-1$ γιατί ο ελάχιστος χρωματισμός του G δίνει και χρωματισμό του $G_2$. Είναι τελικά $\chi(G_2)\leq\chi(G)-1$ αφού χρωματισμός του $G_2$ με λιγότερα από $\chi(G)-1$ χρώματα θα έδινε χρωματισμό του $G$ με λιγότερο από $\chi(G)$ χρώματα.
Για την δεύτερη διαμέριση:
Έστω $u$ και $v$ δυο κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή. Θέτω $V_1$ το σύνολο που περιέχει ακριβώς την $u$ και τους γείτονές της. Έτσι η $v$ θα ανήκει στο $V_2=V\setminus V_1$ και άρα θα έχω διαμέριση. Χρωματίζω το $G_1$ με $\chi(G_1)$ χρώματα και το $G_2$ με $\chi(G_2)$ διαφορετικά από το $G_1$ χρώματα. Επιλέγω τυχαίο χρώμα από το χρωματισμό του $G_2$ και το δίνω στην κορυφή $u$ του $G_1$. Με αυτό τον τρόπο χρωματίζω σωστά τον $G$ με $\chi(G_1)+\chi(G_2)-1$ χρώματα και άρα $\chi(G_1)+\chi(G_2)>\chi(G)$.