Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

3η γραπτή εργασία, Σχέδιο Λύσεων

Επιμέλεια: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

ΘΕΜΑ 1 (Συνδυαστική, 2.6 μονάδες)

Θεωρούμε 100 επιβάτες του προαστιακού, οι οποίοι έχουν επιβιβαστεί στο Αεροδρόμιο, και αποβιβάζονται σε κάποιους από τους επόμενους 12 σταθμούς (σε κάθε σταθμό, αποβιβάζονται κανένας ή περισσότεροι επιβάτες). Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό:

1. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες δεν είναι διακεκριμένοι;
2. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι και δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης
3. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι και παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης
4. αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι 45 άνδρες και 55 γυναίκες, ότι τόσο οι άνδρες μεταξύ τους όσο και οι γυναίκες μεταξύ τους δεν είναι διακεκριμένοι, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
5. αν θεωρήσουμε ότι και στο (4), με μόνη διαφορά ότι τώρα παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
6. Πόσοι είναι οι τρόποι αποβίβασης για τα ερωτήματα (1) και (3) αν σε κάθε σταθμό κατεβαίνει τουλάχιστον ένας επιβάτης;

1. Έστω πως στην πρώτη στάση αποβιβάζονται x_1 επιβάτες, στη δεύτερη x_2 κ.λπ. Ισχύει πως $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{12} = 100$. Οι διαφορετικές λύσεις αυτής της εξίσωσης χωρίς κανένα περιορισμό είναι
$$C(12+100-1,100) = C(111,100) = \frac{111!}{100!*11!}.$$
2. Ο επιβάτης 1 μπορεί να κατέβει σε μία από τις 12 στάσεις. Ο επιβάτης 2 μπορεί επίσης να κατέβει σε μία από τις 12 στάσεις. Κάθε επιβάτης έχει ουσιαστικά 12 επιλογές. $12*12*12*...*12 = 12^{100}$.
3. Ο επιβάτης 1 έχει πάλι 12 επιλογές. Ο επιβάτης 2 έχει 11 επιλογές όσον αφορά τις στάσεις που δεν κατέβηκε ο επιβάτης 1 και αν κατέβει στην ίδια στάση με τον επιβάτη 1 έχει δύο επιλογές που έχουν σχέση με το αν κατεβαίνει πριν ή μετά τον επιβάτη 1. Άρα συνολικά 13 επιλογές. Με την ίδια λογική ο επιβάτης 3 έχει 14 επιλογές και ούτω καθεξής. Ο επιβάτης 100 έχει 111 επιλογές.
$$12*13*14*15*...*111 = \frac{111!}{11!}$$
4. Από το ερώτημα (1) έχουμε για τους άνδρες να υπολογίσουμε τις διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{12} = 45$. Επομένως
$C(12+45-1,45) = C(56,45) = \frac{56!}{45!*11!}$ τρόπους αποβίβασης για τους άνδρες και για κάθε τέτοιο τρόπο έχουμε αντίστοιχα

$C(12+55-1{,}55)=C(66{,}55)=\frac{66!}{55!*11!}$ τρόπους αποβίβασης για τις γυναίκες. Άρα συνολικά $\frac{56!}{45!*11!}*\frac{66!}{55!*11!}$.

5. $1^{ος}$ τρόπος

Από το ερώτημα (4) έχουμε για τους άνδρες $\frac{56!}{45!*11!}$ τρόπους αποβίβασης. Για κάθε τέτοιο τρόπο βρίσκουμε με πόσους τρόπους θα αποβιβαστούν οι γυναίκες. Αν θεωρήσουμε πως οι γυναίκες είναι διακεκριμένες τότε η πρώτη γυνάικα έχει 57 τρόπους αποβίβασης, η δεύτερη 58 ,... , και η τελευταία 111. Δηλαδή $57*58*59*...*111=\frac{111!}{56!}$ τρόπους. Επειδή όμως δεν είναι διακεκριμένες διαιρώ με το $55!$ Και παίρνουμε $\frac{111!}{55!*56!}$ τρόπους αποβίβασης των γυναικών για κάθε τρόπο αποβίβασης των ανδρών. Συνολικά έχουμε

$\frac{56!}{45!*11!}*\frac{111!}{55!*56!}=\frac{111!}{45!*11!*55!}$ τρόπους αποβίβασης.

$2^{ος}$ τρόπος

Έχουμε 45 άνδρες, 55 γυναίκες και 12 στάσεις. Γράφουμε σε μία σειρά τους άνδρες, τις γυνάικες και χρησιμοποιούμε καθέτους | για να διαχωρίσουμε τις ομάδες ανθρώπων που κατεβαίνουν σε κάθε στάση. Θα χρειαστούμε 11 καθέτους και μια τέτοια σειρά θα μοιάζει όπως η παρακάτω.

Α Α Γ | Α Γ| Α Α Γ| Γ Γ| Α Γ | Α Γ | Α Γ Γ Γ | Α Γ | Α | |Γ| Γ

Αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε όλες τις μεταθέσεις ανδρών,γυναικών και καθέτων, οι οποίες είναι:

$$\frac{(55+45+11)!}{55!*45!*11!}=\frac{111!}{11!*45!*55!}.$$

Για το ερώτημα 1. Έστω πως στην πρώτη στάση αποβιβάζονται x_1 επιβάτες, στη δεύτερη x_2 κ.λπ. Ισχύει πως $x_1+x_2+x_3+...+x_{12}=100$. Ο περιορισμός είναι $x_i \geq 1$ για $i=1,2,...,12$. Οι διαφορετικές λύσεις αυτής της εξίσωσης με τον παραπάνω περιορισμό είναι

$$C(12+(100-12)-1,(100-12))=C(99{,}88)=\frac{99!}{88!*11!}.$$

Για το ερώτημα 3. Αν οι επιβάτες δεν ήταν διακεκριμένοι θα είχαμε $C(99{,}88)$. Δεδομένου ότι είναι διακεκριμένοι πολ/ζουμε με 100!

Συνολικό πλήθος τρόπων $100!C(99{,}88)=\frac{100!*99!}{11!*88!}$

ΘΕΜΑ 2 (Συνδυαστική, 1.6 μονάδες)

(α) Σε ένα παιδικό πάρτυ έχουν έρθει 40 παιδιά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε 4 (ίδια) στρογγυλά τραπέζια των 10 θέσεων το καθένα.

(β) Ένα ράφι περιλαμβάνει n διακεκριμένα βιβλία στη σειρά. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε $k, 2k \leq n+1$, βιβλία (χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά επιλογής), με την προϋπόθεση να μην επιλεγούν βιβλία που βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

(γ) Διαμερίζουμε το σύνολο των προτασιακών τύπων που ορίζονται σε $n \geq 5$ προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, ..., p_n$ ώστε κάθε κλάση της διαμέρισης να περιέχει όλους τους ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους. (i)Πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις που σχηματίζονται; (ii) Πόσες από τις κλάσεις αυτές περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \to p_2) \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5] \to \psi$;

(α) Αρχικά χωρίζουμε τα 40 μη διακεκριμένα παιδιά σε ομάδες των 10 με $\frac{40!}{(10!)^4}$ τρόπους. Και επειδή τα τραπέζια δεν είναι διακεκριμένα διαιρούμε με το $4!$. Επομένως έχουμε $\frac{40!}{(10!)^4} \cdot \frac{1}{4!}$. Κατόπιν λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά με την οποία κάθονται τα παιδιά στο κάθε τραπέζι και αυτό γίνεται με $9!$ τρόπους. Συνολικά έχω $\frac{40!}{(10!)^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot 9!$ τρόπους.

(β) Κάθε φορά που επιλέγω ένα βιβλίο ουσιαστικά δεσμεύω και το διπλανό του εφόσσον δεν μπορώ να το επιλέξω (εξαίρεση αποτελεί το τελευταίο βιβλίο που επιλέγω). Αυτά τα βιβλία είναι $2k-1$ στο πλήθος. Τα βιβλία που απομένουν είναι $n-(2k-1)$. Τα k βιβλία ορίζουν $k+1$ περιοχές στο ράφι (αριστερά του πρώτου από τα k βιβλία, μεταξύ των βιβλίων που επιλέγω και δεξιά του τελευταίου). Στις θέσεις αυτές διανέμονται τα $n-(2k-1)$ βιβλία. Αντί λοιπόν να βρώ τους διαφορετικούς τρόπους να επιλέξω τα k βιβλία λύνω το ισοδύναμο πρόβλημα που είναι να τοποθετήσω τα $n-(2k-1)$ βιβλία στις $k+1$ περιοχές που δημιουργούνται. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πλήθος των βιβλίων κάθε περιοχής. Άρα ουσιαστικά το ισοδύναμο πρόβλημα είναι να διανείμω $n-(2k-1)$ ίδια αντικείμενα (ίδια γιατί η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων είναι προκαθορισμένη) σε $k+1$ περιοχές. Αυτοί οι τρόποι είναι: $C(k+1+n-(2k-1)-1, n-(2k-1)) = C(n-k+1, n-2k+1) = C(n-k+1, k)$

(γ)

(i) Αν οι προτασιακές μεταβλητές είναι n και κάθε μία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής έχουμε 2^n διαφορετικές αποτιμήσεις. Κάθε αποτίμηση μπορεί να δώσει στον προτασιακό τύπο ψευδή ή αληθή τιμή. Επομένως το πλήθος των κλάσεων είναι 2^{2^n}.

(ii) Ο ψ πρέπει να είναι αληθής στις αποτιμήσεις (Α,Α,Α,Α,Α), (Ψ,Ψ,Α,Α,Α), (Ψ,Α,Α,Α,Α) στις οποίες το αριστερό μέρος της συνεπαγωγής είναι αληθές. Άρα έχω $3 \cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις στις οποίες ο ψ πρέπει να είναι αληθής. Κατά συνέπεια απομένουν $2^n - 3 \cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις για τον ψ που είναι ελεύθερες. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί αυτών των αποτιμήσεων είναι $2^{2^n - 3 \cdot 2^{n-5}}$. Αυτό είναι το πλήθος των κλάσεων που ικανοποιούν την συνεπαγωγή.

ΘΕΜΑ 3 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.5 μονάδες)

(α) Ένα μάθημα παρακολουθείται από 500 φοιτητές και διδάσκεται σε 4 τμήματα από 4 διαφορετικούς καθηγητές (κάθε καθηγητής αναλαμβάνει ένα τμήμα εξ΄ολοκλήρου και μπορεί να διαφοροποιηθεί ως προς τον τρόπο εξέτασης). Να διατυπώσετε τη Γεννήτρια Συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να χωριστούν οι φοιτητές σε τμήματα, αν κάθε τμήμα πρέπει να έχει τουλάχιστον 50 και το πολύ 200 φοιτητές και:

1. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα;
2. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα;

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τετραδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 1$ στις οποίες το ψηφίο 0 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, το ψηφίο 1 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων και το ψηφίο 2 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων. (δεν έχουμε περιορισμούς για το πλήθος των εμφανίσεων του ψηφίου 3).

(α)

1. $$\frac{x^{50}}{50!}+\frac{x^{51}}{51!}+\ldots+\frac{x^{200}}{200!}$$

$$A(x)=\left(\frac{x^{50}}{50!}+\frac{x^{51}}{51!}+\ldots+\frac{x^{200}}{200!}\right)^4$$

την απάντηση δίνει ο συντελεστής του $\frac{x^{500}}{500!}$

2. Έχουμε διακεκριμένα αντικείμενα (φοιτητές) σε διακεκριμένες υποδοχές (τμήματα) άρα έχουμε πρόβλημα διατάξεων και θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τοποθετούνται οι φοιτητές στα τμήματα γι' αυτό χρησιμοποιούμε απαριθμητές της μορφής $k! \cdot x^k / k!$. Κάθε υποδοχή δέχεται 50 έως 80 αντικείμενα και έχουμε 4 υποδοχές επομένως σχηματίζουμε την παρακάτω εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. $\left(50!\frac{x^{50}}{50!}+\ldots+200!\frac{x^{200}}{200!}\right)^4=\left(x^{50}+\ldots+x^{200}\right)^4$
Έχουμε 500 αντικείμενα να μοιράσουμε επομένως την απάντηση θα μας δώσει ο συντελεστής του όρου $\frac{x^{500}}{500!}$.

(β)

Κατασκευάζουμε τον εκθετικό απαριθμητή για κάθε ψηφίο.

Για το 0 : $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=e^x-1$

Για το 1 : $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Για το 2 : $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Για το 3 : $1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=e^x$

Η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι η

$$\left(e^x-1\right)\cdot\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot e^x\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(e^{4x}-e^{3x}+e^{-x}-1\right)$$

Αναζητούμε το συντελεστή του $\frac{x^n}{n!}$ ο οποίος ισούται με $\frac{4^n-3^n+\left(-1\right)^n}{4}$

ΘΕΜΑ 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.3 μονάδες)

Θεωρούμε n φοιτητές που απαντούν, ο καθένας ανεξάρτητα σε μία ερώτηση. Για κάθε φοιτητή i, έστω $p_i \in [0,1]$ η πιθανότητα να απαντήσει σωστά.

(α) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα **ακριβώς** k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα **το πολύ** k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

(α) Για $n=2$ και $k=1$ η πιθανότητα να έχουμε ένα φοιτητή που απάντησε σωστά είναι $(1-p_1)p_2+(1-p_2)p_1$

Το ίδιο προκύπτει από τη Γ.Σ. $(1-p_1)(1-p_2)+[(1-p_1)p_2+(1-p_2)p_1]x+p_1p_2x^2$ με απαριθμητές $(1-p_1)+p_1x$ και $(1-p_2)+p_2x$

Για $n \in N$ ο απαριθμητής i είναι $(1-p_i)+p_ix$ όπου $i=1,2,\ldots,n$ και η Γ.Σ.

$A(x)=\prod_{i=1}^{n}[(1-p_i)+p_ix]$. Ο συντελεστής του x^k μας δίνει την πιθανότητα να απαντήσουν σωστά k φοιτητές.

(β) Η πιθανότητα είναι το άθροισμα των k πρώτων όρων της γεννήτριας συνάρτησης του ερωτήματος (α). Αν η $A(x)$ παράγει την ακολουθία a_k, θέλουμε να υπολογίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ που παράγει την ακολουθία $b_k=\sum_{n=0}^{k}a_n$. Αυτή είναι η

$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[(1-p_i)+p_ix]}{1-x}$ και αναζητώ τον συντελεστή του x^k.

ΘΕΜΑ 5 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις 3 μονάδες)
Θεωρούμε μία σχολή ΗΜΜΥ με 200 εγγεγραμμένους φοιτητές σε καθένα από τα πέντε έτη σπουδών (άρα έχουμε 1000 φοιτητές συνολικά). Στα πλαίσια μιας διαφημιστικής εκστρατείας, έχουμε 300 (ίδια) κόκκινα και 700 (ίδια) πράσινα μπλουζάκια, τα οποία θα μοιράσουμε στους φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει ένα μπλουζάκι.
(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια:
1. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.
2. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια, αν σε κάθε έτος πρέπει να μοιράσουμε τουλάχιστον 2 και συνολικά άρτιο πλήθος από κόκκινα και από πράσινα μπλουζάκια, και:
1. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
2. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.
(γ) Με αμιγώς συνδυαστικά επιχειρήματα, να δείξετε ότι οι συντελεστές των όρων x^{400} και x^{600} στο ανάπτυγμα της $A(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... + x^{200})^5$ είναι ίσοι.

(α)
1. $\dfrac{1000!}{300!*700!}$

2. Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού. Από το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 300 αντικείμενα σε 5 υποδοχές αφαιρούμε το πλήθος των τρόπων στους οποίους μία υποδοχή να έχει πάνω από 200 αντικείμενα. (Δεν γίνεται να υπάρξουν 2 υποδοχές με πάνω από 200)
$$\binom{300+5-1}{5-1} - 5*\binom{99+5-1}{5-1} = \binom{304}{4} - 5*\binom{103}{4}$$

Λύση με Γ.Σ.
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 300 \quad 0 \le x_i \le 200$ για $i = 1,2,3,4,5$
$(1 + x + x^2 + ... + x^{200})^5$
ο συντελεστής του x^{300} δίνει την απάντηση

(β)
Υπολογίζουμε τους τρόπους να μοιράσουμε τα κόκκινα μπλουζάκια (ή τα πράσινα και οι υπόλοιποι φοιτητές θα πάρουν το αντίθετο χρώμα) Οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και σε κάθε έτος αντιστοιχεί ο απαριθμητής
$x^2 + x^4 + ... + x^{198}$ και παίρνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $(x^2 + x^4 + ... + x^{198})^5$
Τα αντικείμενα που έχουμε να μοιράσουμε είναι τα 300 κόκκινα μπλουζάκια. Ο συντελεστής του x^{300} μας δίνει τη λύση.

Αν σε ένα έτος δωθούν k κόκκινα μπλουζάκια και 200-k πράσινα, θέλουμε να μετρήσουμε τους τρόπους αυτά να αναδιαταχθούν. Το πλήθος αναδιάταξης k κόκκινων και 200-k πράσινων είναι $\binom{200}{k}$ (όταν επιλεγούν οι θέσεις των κόκκινων, τα πράσινα μπαίνουν με μοναδικό τρόπο).

Η γεννήτρια συνάρτηση που προκύπτει είναι η

$B(x)=\left(\binom{200}{2}x^2+\binom{200}{4}x^4+\ldots+\binom{200}{198}x^{198}\right)^5$ και η λύση είναι ο συντελεστής του x^{300}.

(γ) Έχουμε να μοιράσουμε 1000 μπαλάκια (400 πράσινα και 600 κόκκινα) σε 5 διαφορετικές υποδοχές με τον περιορισμό κάθε υποδοχή να έχει 200 μπαλάκια και να δέχεται άρτιο αριθμό από μπαλάκια.

Οι διαφορετικοί τρόποι να μοιράσω τα κόκκινα είναι ίσοι με τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσω τα πράσινα εφόσον το άθροισμα σε κάθε υποδοχή είναι 200.

Η Γ.Σ. είναι η $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=400 \quad 0\le x_i\le 200$ για $i=1,2,3,4,5$

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^{200}\right)^5$$

ο συντελεστής του x^{400} δίνει την απάντηση που είναι ίσος με τον συντελεστή του x^{600}.