ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Θ. Λιανέας
2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια παράδοσης 20/5/2018

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)

α) Σε ένα διάστημα 120 ημερών, μία αεροσυνοδός κάνει τουλάχιστον ένα ταξίδι κάθε ημέρα, και όχι περισσότερα από 180 ταξίδια συνολικά. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα διάστημα (αποτελούμενο από διαδοχικές ημέρες) όπου η αεροσυνοδός κάνει ακριβώς 59 ταξίδια.
β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ. στην ακολουθία 7,5,3,5,7,5,3,7, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 1.5 μονάδες)

α) Έστω ένα γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $(n/2)+1$. Να δειχθεί ότι το G περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3).

β) Σε ένα επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6 δείξτε ότι
1. Αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3 τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5 και
2. Αν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ακριβώς 3 τότε υπάρχουν ακριβώς 12 όψεις βαθμού 5.

γ) Να αποδειχθεί πως αν τρία μονοπάτια P_1, P_2, P_3 ενός δέντρου είναι ανά δύο τεμνόμενα (δηλαδή κάθε δύο από αυτά έχουν μια κοινή κορυφή) τότε υπάρχει μια κορυφή του T που να ανήκει ταυτόχρονα και στα τρία.

Θέμα 3 (Διμερή γραφήματα, 1.8 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$ υπάρχει μία μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;
β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του G. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e = \{u, v\}$, διαγράφουμε την e και προσθέτουμε μία νέα κορυφή x_e που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα u και v της ακμής e. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα G είναι ο κύκλος C_n με n κορυφές.

Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

γ) Έστω γράφημα G και έστω x μια κορυφή του G τέτοια ώστε το $G - x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το G έχει δύο κορυφές u και v που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την x. (i) Να δείξετε ότι αν οι u και v συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το G έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι u και v **δεν** συνδέονται μεταξύ τους, τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

Θέμα 5 (Ισομορφισμός 1.3 μον.)

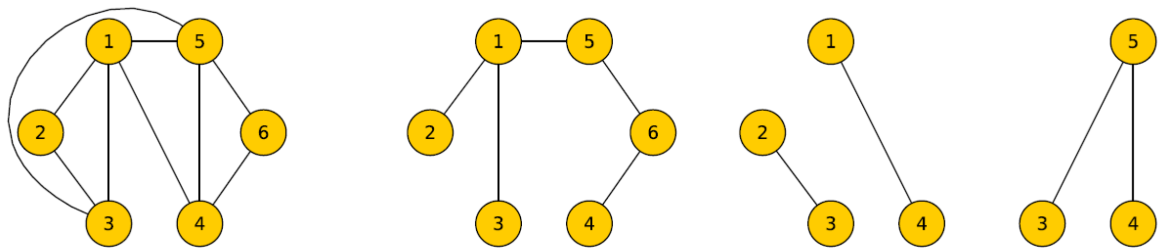
α) Να σχεδιάσετε όλα τα αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα με 7 κορυφές το πολύ.

β) Μεταξύ 1990 πληροφορικών, όπου καθένας συνεργάζεται με τουλάχιστον 1327 άλλους πληροφορικούς, δείξτε ότι υπάρχουν 4 πληροφορικοί οι οποίοι είναι ανά δύο συνεργάτες.

Θέμα 6 (Επιπεδότητα, Χρωματικός αριθμός, 1.8 μονάδες)

α) Έστω G γράφημα που δεν είναι επίπεδο. Να αποδειχθεί πως $\Delta(G) \geq 3$ (μέγιστος βαθμός). Να αποδειχθεί επίσης πως δεν ισχύει το αντίστροφο.

β) Να αποδειχθεί πως κάθε επίπεδο γράφημα είναι η ένωση 5 δασών το πολύ. Η ένωση δύο γραφημάτων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι το γράφημα $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Στο σχήμα που ακολουθεί, το επίπεδο γράφημα στα αριστερά (A) είναι η ένωση των τριών δασών στα δεξιά (b,c και d).



(A) (b) (c) (d)

γ) Να αποδειχθεί πως για κάθε γράφημα G υπάρχει διαμέριση των κόμβων του σε δύο σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε για τα επαγόμενα υπογραφήματα G_1 και G_2 να ισχύει $\chi(G_1) + \chi(G_2) = \chi(G)$. Αν το γράφημα δεν είναι πλήρες τότε υπάρχει άλλη διαμέριση τέτοια ώστε $\chi(G_1) + \chi(G_2) > \chi(G)$.