Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
**Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα**
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
**2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 26/11/2018**

## Άσκηση 1: Επιλογή και Κάλυψη Μαθημάτων

(α) Στο πρόβλημα της επιλογής μαθημάτων έχουμε $n$ αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων, κάθε αίτημα $i$ χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ στο οποίο θα πρέπει διδαχθεί το μάθημα, και στόχος είναι να επιλέξουμε ένα μέγιστο, ως προς τον πληθικό του αριθμό, σύνολο μαθημάτων που δεν έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους.

(α.1) Γνωρίζουμε ήδη ότι μπορούμε να υπολογίσουμε μια βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας το άπληστο κριτήριο του *ελάχιστου χρόνου ολοκλήρωσης*, σύμφωνα με το οποίο επιλέγουμε το διαθέσιμο μάθημα με τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης, αφαιρούμε όσα μαθήματα επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω εναλλακτικά κριτήρια εγγυώνται μια βέλτιστη λύση και ποια όχι. Για κάθε κριτήριο, πρέπει είτε να αποδείξετε ότι οδηγεί πάντα σε μία βέλτιστη λύση είτε να βρείτε ένα στιγμιότυπο όπου η λύση στην οποία οδηγούμαστε δεν είναι βέλτιστη. Για διευκόλυνση, μπορείτε να "σπάσετε" τις ισοπαλίες (ως προς το κριτήριο που εφαρμόζετε) με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

1. *Λιγότερες επικαλύψεις*: Επιλέγουμε το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα, αφαιρούμε όλα τα μαθήματα που επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.
2. *Μεγαλύτερη διάρκεια*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα με τη μεγαλύτερη διάρκεια και επαναλαμβάνουμε.
3. *Περισσότερες επικαλύψεις*: Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα που έχει τις περισσότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα και επαναλαμβάνουμε.

(α.2) Θεωρούμε τώρα ότι κάθε μάθημα $i \in \{1, \dots, n\}$ διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ και δίνει στο φοιτητή έναν αριθμό διδακτικών μονάδων $w_i$ με την επιτυχή παρακολούθησή του. Βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα σύνολο μαθημάτων που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους και μεγιστοποιεί τον συνολικό αριθμό διδακτικών μονάδων.

(β) Το ΔΣ του Φοιτητικού Συλλόγου της Σχολής μόλις αποφάσισε να πραγματοποιηθεί Γενική Συνέλευση φοιτητών αύριο κιόλας, και εσείς αναλάβατε να περάσετε από όλα τα μαθήματα που γίνονται σήμερα στη Σχολή για να ενημερώσετε τους συμφοιτητές σας. Δυστυχώς, πρέπει να βρίσκεστε στα Παλιά Κτήρια όλη τη μέρα. Μπορείτε να φεύγετε μόνο στιγμιαία, προκειμένου να μεταφερθείτε στα Νέα Κτήρια, να περάσετε από όλα τα αμφιθέατρα στα οποία γίνεται μάθημα εκείνη τη στιγμή, και να κάνετε την ανακοίνωσή σας. Γνωρίζετε το πρόγραμμα των μαθημάτων για σήμερα, δηλαδή γνωρίζετε ότι κάθε μάθημα $i \in \{1, \dots, n\}$ διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$. Στόχος σας είναι να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές θα πάτε στα Νέα Κτήρια, ώστε να μετακινηθείτε όσες λιγότερες φορές είναι δυνατόν (θεωρήστε ότι η μεταφορά και οι ανακοινώσεις γίνονται στιγμιαία). Διατυπώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να λύνει αυτό το πρόβλημα. Αποδείξτε την ορθότητά του και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα.

### Άσκηση 2: Τηλεπαιχνίδι

Πρόκειται να λάβετε μέρος στο νέο καταπληκτικό τηλεπαιχνίδι "Σπάστα Όλα". Στο τηλεπαιχνίδι, ο παίκτης έχει στη διάθεσή του $n$ σφυριά για να σπάσει τα $n$ κουτιά που βρίσκονται μπροστά του. Κάθε σφυρί $j$ κτυπάει ένα κουτί με δύναμη $f_j > 0$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα και μόνο κτύπημα (μετά το κτύπημα, το σφυρί αυτοκαταστρέφεται θεαματικά). Αν ο παίκτης καταφέρει να σπάσει το κουτί $i$ κερδίζει $v_i \geq 0$ ευρώ. Για να τα καταφέρει, πρέπει να κτυπήσει το κουτί $i$ με δύναμη τουλάχιστον $p_i \geq 0$. Αν λοιπόν ο παίκτης κτυπήσει το κουτί $i$ με το σφυρί $j$ και $f_j \geq p_i$, τότε το κουτί σπάει και ο παίκτης κερδίζει $v_i$ ευρώ. Διαφορετικά, δηλ. αν $f_j < p_i$, το κουτί $i$ παραμένει άθικτο, ο παίκτης δεν κερδίζει τίποτα, και το κουτί συνεχίζει να χρειάζεται δύναμη $p_i$ για να σπάσει. Ο φίλος σας, που δουλεύει στην παραγωγή, σας έχει ενημερώσει λεπτομερώς για τα χαρακτηριστικά των σφυριών και των κουτιών, και για το κέρδος που δίνει κάθε κουτί. Δεν θα αφήσετε τέτοια ευκαιρία να πάει χαμένη! Θέλετε να βρείτε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει με ποιο σφυρί πρέπει να κτυπήσετε ποιο κουτί, ώστε να μεγιστοποιήσετε το συνολικό σας κέρδος. Να διατυπώσετε ένα αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

### Άσκηση 3: Αναμνηστικά

Με τα χρήματα που θα κερδίσετε από το τηλεπαιχνίδι "Σπάστα Όλα", έχετε αποφασίσει να κάνετε το Γύρο του Κόσμου! Έχετε σχεδιάσει τη διαδρομή, πρόκειται να επισκεφθείτε $n$ χώρες συνολικά, σε όλα τα μήκη και τα πλάτη της Γης. Θέλετε να φέρετε πίσω ένα αναμνηστικό από κάθε χώρα που θα επισκεφθείτε. Ως υπόδειγμα οργάνωσης, έχετε αποφασίσει ότι θα διαθέσετε $C$ ευρώ για τα αναμνηστικά και έχετε ήδη καταγράψει κάθε αναμνηστικό που θα σας ικανοποιούσε από κάθε χώρα. Για κάθε χώρα $i$, έχετε ξεχωρίσει $k_i$ αναμνηστικά. Το αναμνηστικό $j$ από τη χώρα $i$ έχει συναισθηματική αξία $p_{ij}$ για σας και κοστίζει $c_{ij}$ ευρώ. Έχετε βέβαια φροντίσει ο προϋπολογισμός σας $C$ να επαρκεί για να αγοράσετε το φθηνότερο αναμνηστικό από κάθε χώρα, αλλά ελπίζετε ότι θα καταφέρετε να πετύχετε κάτι πολύ καλύτερο. Θέλετε λοιπόν να βρείτε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει μια συλλογή αναμνηστικών, ένα από κάθε χώρα που θα επισκεφθείτε, η οποία θα μεγιστοποιεί τη συνολική συναισθηματική αξία και θα έχει συνολικό κόστος που δεν ξεπερνά το $C$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

### Άσκηση 4: Σοκολατάκια

Αφού τελειώσατε με τα σχέδια για το Γύρο του Κόσμου, είναι ώρα να πάρετε το γλυκάκι σας και να ξεκουραστείτε. Είστε πολύ κουρασμένος(η), πραγματικά δεν βλέπετε την ώρα να πάτε για ύπνο! Αλλά δεν μπορείτε να κοιμηθείτε, χωρίς προηγουμένως να καταναλώσετε τουλάχιστον $Q$ σοκολατάκια (για όνειρα γλυκά), και μάλιστα σε όσο το δυνατόν μικρότερο χρονικό διάστημα. Ευτυχώς, τα σοκολατάκια δε λείπουν από το σπίτι σας, είναι άλλωστε γνωστή η αδυναμία σας σε αυτά. Έχετε $n$ κουτιά τοποθετημένα στη σειρά και αριθμημένα από 1 μέχρι και $n$, από τα αριστερά προς τα δεξιά. Για να μετακινηθείτε από το ένα κουτί $i$ στο επόμενο κουτί $i+1$ ή στο προηγούμενο κουτί $i-1$, χρειάζεστε 1 λεπτό (λόγω και της κούρασης). Τα κουτιά περιέχουν $K \leq n$ διαφορετικούς τύπους από σοκολατάκια συνολικά, και κάθε κουτί $i$ περιέχει $q_i$ σοκολατάκια ενός μόνο τύπου $t_i$. Αν ανοίξετε το κουτί $i$, ξέρετε καλά ότι θα καταναλώσετε, σε πρακτικά μηδενικό χρόνο, όλα τα σοκολατάκια που περιέχει, πριν συνεχίσετε στο επόμενο κουτί. Και βέβαια θα ήταν μεγάλη απογοήτευση, αν έπειτα από ένα κουτί $i$, ανοίγατε ένα κουτί $j$ με σοκολατάκια του ίδιου τύπου $t_j = t_i$ με το κουτί $i$ ή με λιγότερα σοκολατάκια $q_j < q_i$ από το κουτί $i$.

Είστε μπροστά στο κουτί $p$, $1 \leq p \leq n$, και θέλετε να βρείτε ποια κουτιά θα ανοίξετε απόψε, και με ποια σειρά, ώστε να καταναλώσετε τουλάχιστον $Q$ σοκολατάκια στον μικρότερο δυνατό χρόνο, δεδομένου ότι για κάθε δύο κουτιά $i$ και $j$ που ανοίγετε διαδοχικά, με το $i$ να προηγείται του $j$, θα πρέπει $q_i \leq q_j$ και $t_i \neq t_j$. Προσέξτε ότι ο χρόνος που θα χρειαστείτε καθορίζεται αποκλειστικά από τον χρόνο που χρειάζεται για να μετακινηθείτε από κάθε κουτί που ανοίγετε στο επόμενο.

Πριν πάτε για ύπνο, αποφασίζετε να λύσετε αυτό το πρόβλημα, μια για πάντα. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα και να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

### Άσκηση 5: Πομποί και Δέκτες

Έχουμε $n$ κεραίες, που μπορούν να λειτουργήσουν είτε ως πομποί είτε ως δέκτες και είναι τοποθετημένες σε μια νοητή ευθεία, στην διεύθυνση δύσης - ανατολής. Οι πομποί εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο από τα δυτικά. Κάθε πομπός μπορεί να στέλνει μηνύματα σε έναν και μοναδικό δέκτη (και αντίστοιχα κάθε δέκτης μπορεί να λαμβάνει μηνύματα από έναν και μοναδικό πομπό, δεν έχουμε καθόλου προβλήματα παρεμβολών ή εξασθένησης σήματος λόγω της απόστασης). Για διευκόλυνση, θεωρούμε ότι έχουμε άρτιο πλήθος κεραιών $n$.

Όταν μία κεραία $i$ λειτουργεί ως πομπός, έχει κατανάλωση ισχύος $T_i$, ενώ όταν λειτουργεί ως δέκτης έχει κατανάλωση ισχύος $R_i \leq T_i$. Το ζητούμενο είναι να χωρίσουμε τις κεραίες σε $n/2$ ζεύγη πομπού-δέκτη ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική κατανάλωση ισχύος (οι κεραίες αριθμούνται πάντα από τα δυτικά προς τα ανατολικά, και για κάθε ζεύγος πομπού $i$ − δέκτη $j$, πρέπει να ισχύει ότι $i < j$). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (υπάρχει bonus για ιδιαίτερα αποδοτικούς αλγόριθμους). *Παράδειγμα*: Έστω ότι έχουμε 4 κεραίες με κατανάλωση ενέργειας (ως πομποί και δέκτες αντίστοιχα, από τα δυτικά προς τα ανατολικά): $(9, 6)$, $(6, 2)$, $(8, 1)$ και $(5, 3)$. Βέλτιστη λύση είναι να "ζευγαρώσουμε" τις κεραίες 1-3 και 2-4 ή τις κεραίες 1-4 και 2-3, με συνολική κατανάλωση ενέργειας 19.