Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
3η Σειρά Γραπτών και Προγραμματιστικών Ασκήσεων

CoReLab

ΣΗΜΜΥ - Ε.Μ.Π.

Ιανουάριος 2019

Outline

Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

Είσοδος: Δέντρο $T(V, E)$ με βάρη $w(u) \in \mathbb{Z}$, για κάθε κόμβο $u \in V$ (πιθανώς αρνητικά).

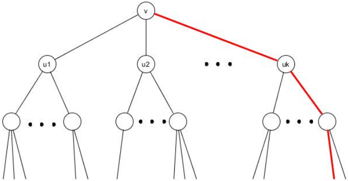
Ζητείται: Απλό μονοπάτι p που να μεγιστοποιεί το συνολικό βάρος $w(p) = \sum_{u \in p} w(u)$.

Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

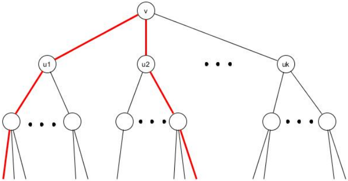
Ιδέα: Έστω ότι επιλέγουμε κόμβο v και τον θεωρούμε ρίζα του δέντρου, με παιδιά τους κόμβους $u_1, ..., u_k$. Τότε έχουμε τις εξής δυο βασικές περιπτώσεις:

- Π1. Ο v ανήκει στο μονοπάτι p: Διακρίνουμε δυο υποπεριπτώσεις:
  - Π1.α. Ο v είναι 'ακριανός' κόμβος του μονοπατιού: Σε αυτήν την περίπτωση, το μονοπάτι p, αν αφαιρέσουμε τον v, είναι το μέγιστου βάρους μονοπάτι που βρίσκεται σε ένα από τα υποδέντρα με ρίζα $u_1, ..., u_k$ και 'καταλήγει' στην αντίστοιχη ρίζα.
  - Π1.β. Ο v είναι 'ενδιάμεσος' κόμβος του μονοπατιού: Σε αυτήν την περίπτωση, αν αφαιρέσουμε τον v, το p 'σπάει' σε δυο μονοπάτια, τα δυο μέγιστου βάρους που βρίσκονται στα υποδέντρα με ρίζα $u_1, ..., u_k$ και 'καταλήγουν' στην αντίστοιχη ρίζα (σε διαφορετικά υποδέντρα).
- Π2. Ο v δεν ανήκει στο p: Σε αυτήν την περίπτωση, το μέγιστο μονοπάτι βρίσκεται σε κάποιο από τα υποδέντρα με ρίζα $u_1, ..., u_k$.

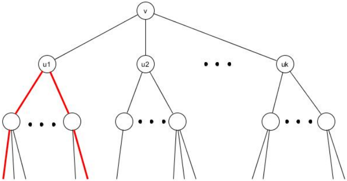
Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο



(α′) Π1.α



(β′) Π1.β



(γ′) Π2

Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

Λύση: Για κάθε κόμβο u κρατάμε δυο τιμές, $w_e(u)$ και $w_m(u)$. Στο υποδέντρο με ρίζα τον u, το $w_e(u)$ συμβολίζει το μέγιστο βάρος μονοπατιού που 'καταλήγει' στον u και το $w_m(u)$ συμβολίζει το μέγιστο βάρος μονοπατιού που περιέχει ως ενδιάμεσο τον u.
Έτσι, αν γνωρίζουμε τα $w_e(u_1), \ldots, w_e(u_k)$, για να υπολογίσουμε τα $w_e(v)$ και $w_m(v)$ έχουμε τις εξής (αναδρομικές) σχέσεις:

1. $w_e(v) = w(v) + \max\{\max_{u \in \{u_1,\ldots,u_k\}}\{w_e(u)\}, 0\}$ (*).
2. $w_m(v) = w(v) + \max\{\max_{u_i,u_j \in \{u_1,\ldots,u_k\} | u_i \neq u_j}\{w_e(u_i) + w_e(u_j)\}, 0\}$

- Παρατηρήστε ότι αρκεί να θυμόμαστε τα δυο μέγιστα $w_e(u_i), w_e(u_j) \in \{w_e(u_1), \ldots, w_e(u_k)\}$.
- Τρέχουμε αναδρομικά για κάθε κόμβο του δέντρου, με *DFS*.
- Για κάθε κόμβο θυμόμαστε ποιό (η ποιά - για το $w_m(u)$) είναι το παιδί του επιλέξαμε.

Άσκηση 1: Μακρύτερο Μονοπάτι σε Δέντρο

<u>Λύση</u>: Προσέχουμε (*) ότι αν όλα τα τα μέγιστα μονοπάτια που καταλήγουν στα παιδιά του υπό αναβάθμιση κόμβου *u* είναι αρνητικά, κρατάμε μόνο το βάρος του κόμβου - και θυμόμαστε ότι δεν επιλέξαμε κανένα παιδί του (δηλ. αν ο *u* ανήκει στην τελική λύση, θα είναι 'ακριανός' κόμβος). Έτσι 'αποκόπτουμε' τα αρνητικά 'υπομονοπάτια'.

- Τέλος, σε κάθε αναβάθμιση κόμβου θυμόμαστε ποια είναι τα μέγιστα w_e και w_m (w_{e_max} και w_{m_max}) που έχουμε συναντήσει.
- Ξεκινώντας από τον κόμβο με το μέγιστο εκ των w_{e_max} και w_{m_max} και ακολουθώντας αναδρομικά τα επιλεγμένα παιδιά, έχουμε το ζητούμενο μονοπάτι.
- Παρατηρήστε, ότι αν δεν υπάρχει κανένα 'θετικό' μονοπάτι με τουλάχιστον μια ακμή, το μέγιστο μονοπάτι είναι ο κόμβος με το μεγαλύτερο βάρος.

Πολυπλοκότητα:

- Όπως είδαμε, αν για κόμβο v με παιδιά $u_1, \ldots, u_k$ θυμόμαστε τα δύο μέγιστα $w_e(u_i), w_e(u_j)$ κατά την αναδρομή, τα $w_e(v)$ και $w_m(v)$ υπολογίζονται σε $O(1)$.
- Οπότε κρατάμε δυο τιμές, $mx_1(v), mx_2(v)$ για κάθε κόμβο v, που αντιστοιχούν στα δυο μέγιστα $w_e(u_i), w_e(u_j) \in \{w_e(u_1), \ldots, w_e(u_2)\}$ και τις ενημερώνουμε κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα $w_e(u_l) \in \{w_e(u_1), \ldots, w_e(u_2)\}$.
- Η σειρά του *DFS* εξασφαλίζει ότι θα έχουμε υπολογίσει τα $mx_1(v), mx_2(v)$ όταν φτάσουμε στον υπολογισμό των τιμών του v.

Πολυπλοκότητα

$$O(|V|)$$

Outline

Άσκηση 2α)

Έστω κατευθυνόμενο γράφημα όπου κάθε κορυφή έχει μια ακέραια τιμή $p_u > 0$. Ορίζουμε ως κόστος κάθε κορυφής:
$c(u) =$ τιμή της φθηνότερης κορυφής που είναι προσπελάσιμη από τη u (συμπεριλαμβανομένης της u)

Είσοδος: Κατευθυν. γράφημα $G(V, E)$ με τιμές $p_u \forall u \in V$.
Ζητούμενο: Αλγόριθμος γραμμικού χρόνου που υπολογίζει το $c(u)$ για κάθε κορυφή u
(α) DAG
(β) Γενίκευση για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα G

Ασκηση 2 α)

Εστω μια κορυφή u.
Τότε όλες οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες από τη u είναι οι εξής:

- η ίδια η κορυφή u
- οι κορυφές με τις οποίες συνδέεται με ακμή $u \to v_i : v_1, \ldots, v_d$.
- οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες από τις $v_1, \ldots, v_d$

Συνοπτικά γράφουμε:

$$c(u) = \min\{p_u, min_{v:(u,v)\in E}\{c(v)\}\}$$

Ασκηση 2 α)

Θέλουμε να βρούμε ένα τρόπο

- να υπολογίσουμε πρώτα όλες τις τιμές $c(v), \forall v : (u, v) \in E$
- μετά να κρατήσουμε τη μικρότερη τιμή

$$\min\{p_u, \min_{v:(u,v)\in E}\{c(v)\}\}$$

Θα θέλαμε να χειριστούμε τις κορυφές με μια *συγκεκριμένη σειρά*.

$$\Downarrow$$

Επειδή το γράφημα είναι *DAG*, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τοπολογική διάταξη και έπειτα να εξετάσουμε τις κορυφές στην αντίστροφη σειρά.

Ασκηση 2 α)

Αλγόριθμος

1. Τοπολογική διάταξη των κορυφών στο G.
2. Εξετάζοντας τις κορυφές σε αντίστροφη σειρά από την τοπολογική διάταξη: Για κάθε κορυφή $u \in V$ υπολογίζουμε

$$c(u) = \min\{pu, \min_{v:(u,v)\in E}\{c(v)\}\}$$

Πολυπλοκότητα

Και τα δύο βήματα απαιτούν χρόνο $O(|V| + |E|)$, άρα γραμμικός αλγόριθμος

Ασκηση 2 β)

Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα (ΙΣΣ) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E) =$ ένα μέγιστο σύνολο κορυφών $U \subseteq V$, τ.ώ. $u, v \in U$ να υπάρχει διαδρομή $u \to v$ και $v \to u$.

Θα βασιστούμε στο γεγονός ότι

Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός κατευθυνόμενου γραφήματος μπορούν να υπολογιστούν σε γραμμικό χρόνο.

Ασκηση 2 β)

- Το γράφημα G' που προκύπτει αν *συρρικνώσουμε* κάθε ΙΣΣ σε μια κορυφή είναι DAG.
- Αν βρούμε τη τοπολογική διάταξη του 'μεταγραφήματος' αυτού, ουσιαστικά βάζουμε τις ΙΣΣ σε μια φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS
- τερματική: ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (= ισχυρά συνεκτική συνιστώσα χωρίς εξερχόμενες ακμές στο μεταγράφημα).
- στην τοπολογική διάταξη του μεταγραφήματος, μια τερματική ΙΣΣ είναι η μετακορυφή με το χαμηλότερο χρόνο αναχώρησης, δηλ. η τελευταία στη διάταξη.

Ασκηση 2 β)

- Αν ξεκινήσουμε τον DFS από έναν κόμβο που ανήκει σε μια τερματική ΙΣΣ, τότε θα εξερευνήσουμε όλη την ΙΣΣ αυτή και θα σταματήσουμε.
- Ιδέα Αλγορίθμου
  1. Ξεκινάμε από έναν κόμβο που ανήκει σε μια τερματική ΙΣΣ.
  2. Βρίσκουμε μέσω DFS όλους τους κόμβους σε αυτήν την ΙΣΣ.
  3. Αφαιρούμε την ΙΣΣ αυτή και επαναλαμβάνουμε.
- *Πώς βρίσκουμε μια τερματική ΙΣΣ;*

Απάντηση

Στο αντίστροφο γράφημα G^R μια τερματική ΙΣΣ γίνεται μια αρχική ΙΣΣ, δηλαδή μια ΙΣΣ χωρίς εισερχόμενες ακμές

Ασκηση 2 β)

Αλγόριθμος για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

1. $DFS(G)$ για τον υπολογισμό των χρόνων αναχώρησης $f[u]$ για κάθε $u \in V$.
2. υπολογισμός αντίστροφου γραφήματος G^R (δηλ. με ανεστραμμένες τις ακμές)
3. $DFS(G^R) \rightarrow$ στο κύριο βρόχο φορ της $DFS - Init$ εξετάζουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά των χρόνων $f[u]$ από το βήμα 1.
4. οι κορυφές κάθε δένδρου από το βήμα 3 συναποτελούν μια συνεκτική συνιστώσα.

Πολυπλοκότητα

$O(|V| + |E|)$

Outline

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενος γράφος κινήσεων

Έξοδος: Νικητής του παιχνιδιού για κάθε συνδυασμό αρχικών θέσεων

Λύση (Ιδέα):

- Δημιουργούμε ένα νέο γράφο με $O(V^2)$ κόμβους και $O(VE)$ ακμές όπου ο κάθε κόμβος είναι της μορφής (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενη κίνηση) και κάθε ακμή της μορφής «K,A,K), (K′,A,A» ή «K,A,A), (K,A′,K», όπου οι (K,K′) και (A,A′) είναι ακμές του αρχικού γράφου
- Θα δώσουμε σε κάθε κόμβο μια ετικέτα A, K ή I αν ξεκινώντας απ' αυτή την κατάσταση το παιχνίδι καταλήγει σε νίκη του Ανδρέα, του Κώστα ή έρχεται ισόπαλο
- Αν για ένα κόμβο γνωρίζουμε την ετικέτα όλων των γειτόνων του μπορούμε εύκολα να βρούμε τη δική του

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενος γράφος κινήσεων

Έξοδος: Νικητής του παιχνιδιού για κάθε συνδυασμό αρχικών θέσεων

Λύση (Ιδέα):

- Δημιουργούμε ένα νέο γράφο με $O(V^2)$ κόμβους και $O(VE)$ ακμές όπου ο κάθε κόμβος είναι της μορφής (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενη κίνηση) και κάθε ακμή της μορφής «K,A,K), (K′,A,A» ή «K,A,A), (K,A′,K», όπου οι (K,K′) και (A,A′) είναι ακμές του αρχικού γράφου
- Θα δώσουμε σε κάθε κόμβο μια ετικέτα A, K ή I αν ξεκινώντας απ' αυτή την κατάσταση το παιχνίδι καταλήγει σε νίκη του Ανδρέα, του Κώστα ή έρχεται ισόπαλο
- Αν για ένα κόμβο γνωρίζουμε την ετικέτα όλων των γειτόνων του μπορούμε εύκολα να βρούμε τη δική του

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενος γράφος κινήσεων

Έξοδος: Νικητής του παιχνιδιού για κάθε συνδυασμό αρχικών θέσεων

Λύση (Ιδέα):

- Δημιουργούμε ένα νέο γράφο με $O(V^2)$ κόμβους και $O(VE)$ ακμές όπου ο κάθε κόμβος είναι της μορφής (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενη κίνηση) και κάθε ακμή της μορφής «Κ,Α,Κ), (Κ′,Α,Α» ή «Κ,Α,Α), (Κ,Α′,Κ», όπου οι (Κ,Κ′) και (Α,Α′) είναι ακμές του αρχικού γράφου
- Θα δώσουμε σε κάθε κόμβο μια ετικέτα Α, Κ ή Ι αν ξεκινώντας απ′ αυτή την κατάσταση το παιχνίδι καταλήγει σε νίκη του Ανδρέα, του Κώστα ή έρχεται ισόπαλο
- Αν για ένα κόμβο γνωρίζουμε την ετικέτα όλων των γειτόνων του μπορούμε εύκολα να βρούμε τη δική του

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενος γράφος κινήσεων

Έξοδος: Νικητής του παιχνιδιού για κάθε συνδυασμό αρχικών θέσεων

Λύση (Ιδέα):

- Δημιουργούμε ένα νέο γράφο με $O(V^2)$ κόμβους και $O(VE)$ ακμές όπου ο κάθε κόμβος είναι της μορφής (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενη κίνηση) και κάθε ακμή της μορφής «K,A,K), (K′,A,A» ή «K,A,A), (K,A′,K», όπου οι (K,K′) και (A,A′) είναι ακμές του αρχικού γράφου
- Θα δώσουμε σε κάθε κόμβο μια ετικέτα A, K ή I αν ξεκινώντας απ' αυτή την κατάσταση το παιχνίδι καταλήγει σε νίκη του Ανδρέα, του Κώστα ή έρχεται ισόπαλο
- Αν για ένα κόμβο γνωρίζουμε την ετικέτα όλων των γειτόνων του μπορούμε εύκολα να βρούμε τη δική του

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενος γράφος κινήσεων

Έξοδος: Νικητής του παιχνιδιού για κάθε συνδυασμό αρχικών θέσεων

Λύση (Ιδέα):

- Δημιουργούμε ένα νέο γράφο με $O(V^2)$ κόμβους και $O(VE)$ ακμές όπου ο κάθε κόμβος είναι της μορφής (θέση Κώστα, θέση Ανδρέα, επόμενη κίνηση) και κάθε ακμή της μορφής «K,A,K), (K′,A,A» ή «K,A,A), (K,A′,K», όπου οι (K,K′) και (A,A′) είναι ακμές του αρχικού γράφου
- Θα δώσουμε σε κάθε κόμβο μια ετικέτα A, K ή I αν ξεκινώντας απ' αυτή την κατάσταση το παιχνίδι καταλήγει σε νίκη του Ανδρέα, του Κώστα ή έρχεται ισόπαλο
- Αν για ένα κόμβο γνωρίζουμε την ετικέτα όλων των γειτόνων του μπορούμε εύκολα να βρούμε τη δική του

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση (Ιδέα):

- Έστω ένας κόμβος v στον οποίο παίζει ο Κώστας
- Αν υπάρχει έστω και **ένας** γείτονας του v που έχει ετικέτα K, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = $ K
- Αν **όλοι** οι γείτονες του v έχουν ετικέτα A, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = $ A
- Διαφορετικά, αν υπάρχουν γείτονες που έχουν ετικέτα A και γείτονες που έχουν ετικέτα I θα έχουμε λαβελ$(v) = $ I
- Θα ακολουθήσουμε μια βοττομ-υπ προσέγγιση για να δώσουμε τις ετικέτες με τη σωστή σειρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση (Ιδέα):

- Έστω ένας κόμβος v στον οποίο παίζει ο Κώστας
- Αν υπάρχει έστω και **ένας** γείτονας του v που έχει ετικέτα K, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{K}$
- Αν **όλοι** οι γείτονες του v έχουν ετικέτα A, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{A}$
- Διαφορετικά, αν υπάρχουν γείτονες που έχουν ετικέτα A και γείτονες που έχουν ετικέτα I θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{I}$
- Θα ακολουθήσουμε μια βοττομ-υπ προσέγγιση για να δώσουμε τις ετικέτες με τη σωστή σειρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση (Ιδέα):

- Έστω ένας κόμβος v στον οποίο παίζει ο Κώστας
- Αν υπάρχει έστω και **ένας** γείτονας του v που έχει ετικέτα K, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{K}$
- Αν **όλοι** οι γείτονες του v έχουν ετικέτα A, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{A}$
- Διαφορετικά, αν υπάρχουν γείτονες που έχουν ετικέτα A και γείτονες που έχουν ετικέτα I θα έχουμε λαβελ$(v) = \mathrm{I}$
- Θα ακολουθήσουμε μια βοττομ-υπ προσέγγιση για να δώσουμε τις ετικέτες με τη σωστή σειρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση (Ιδέα):

- Έστω ένας κόμβος v στον οποίο παίζει ο Κώστας
- Αν υπάρχει έστω και **ένας** γείτονας του v που έχει ετικέτα K, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) =$ K
- Αν **όλοι** οι γείτονες του v έχουν ετικέτα A, τότε θα έχουμε λαβελ$(v) =$ A
- Διαφορετικά, αν υπάρχουν γείτονες που έχουν ετικέτα A και γείτονες που έχουν ετικέτα I θα έχουμε λαβελ$(v) =$ I
- Θα ακολουθήσουμε μια βοττομ-υπ προσέγγιση για να δώσουμε τις ετικέτες με τη σωστή σειρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση (Ιδέα):

- Έστω ένας κόμβος v στον οποίο παίζει ο Κώστας
- Αν υπάρχει έστω και **ένας** γείτονας του v που έχει ετικέτα K, τότε θα έχουμε λαβελ(v) = K
- Αν **όλοι** οι γείτονες του v έχουν ετικέτα A, τότε θα έχουμε λαβελ(v) = A
- Διαφορετικά, αν υπάρχουν γείτονες που έχουν ετικέτα A και γείτονες που έχουν ετικέτα I θα έχουμε λαβελ(v) = I
- Θα ακολουθήσουμε μια βοττομ-υπ προσέγγιση για να δώσουμε τις ετικέτες με τη σωστή σειρά

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες ‘χρωματισμού’ των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
  - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα K, τον χρωματίζουμε K
  - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα A, τον χρωματίζουμε A
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα I και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι I
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (K) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (A)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες 'χρωματισμού' των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
  - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα Κ, τον χρωματίζουμε Κ
  - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα Α, τον χρωματίζουμε Α
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα Ι και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι Ι
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (Κ) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (Α)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες 'χρωματισμού' των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
  - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα K, τον χρωματίζουμε K
  - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα A, τον χρωματίζουμε A
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα I και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι I
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (K) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (A)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες ‘χρωματισμού’ των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
    - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα K, τον χρωματίζουμε K
    - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα A, τον χρωματίζουμε A
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα I και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι I
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (K) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (A)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες 'χρωματισμού' των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
  - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα K, τον χρωματίζουμε K
  - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα A, τον χρωματίζουμε A
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα I και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι I
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (K) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (A)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Λύση

- Θα διατυπώσουμε τους κανονόνες 'χρωματισμού' των κόμβων που παίζει ο Κώστας (συμμετρικά για τον Ανδρέα)
  - Άμεσος χρωματισμός: Αν ένας κόμβος που παίζει ο Κώστας έχει **τουλάχιστον ένα** γείτονα με ετικέτα Κ, τον χρωματίζουμε Κ
  - Έμμεσος χρωματισμός: Αν σε ένα κόμβο που παίζει ο Κώστας έχουν **όλοι** οι γείτονες ετικέτα Α, τον χρωματίζουμε Α
- Αρχικά όλοι οι κόμβοι έχουν την ετικέτα Ι και για κάθε κόμβο κρατάμε έναν μετρητή των γειτόνων που είναι Ι
- Δίνουμε άμεσα ετικέτα σε όλους τους κόμβους όπου ο Κώστας βρίσκεται στο καταφύγιο (Κ) και ο Ανδρέας βρίσκεται στην ίδια θέση με τον Κώστα (Α)
- Κάθε φορά που δίνουμε ετικέτα σε ένα κόμβο τον τοποθετούμε σε μια ουρά

Λύση

- Μέχρι να αδειάσει η ουρά:
  - Βγάζουμε το πρώτο στοιχείο, ελέγχουμε τους γείτονές του και προσπαθούμε να δώσουμε ετικέτα σε όσους είναι I
  - Ελέγχουμε για κάθε γείτονα αν μπορούμε να κάνουμε άμεσο χρωματισμό
  - Αλλιώς μειώνουμε τον μετρητή του γείτονα που δε μπορούμε να χρωματίσουμε άμεσα κατά 1 και όταν γίνει 0 κάνουμε έμμεσο χρωματισμό
- Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν αδειάσει η ουρά, οπότε και δε μπορούμε να κάνουμε άλλους χρωματισμούς

Πολυπλοκότητα Η πολυπλοκότητα του προηγούμενου αλγορίθμου είναι γραμμική στο μέγεθος του νέου γράφου που κατασκευάσαμε, άρα το συνολικό κόστος είναι $O(V^2 + VE)$

Λύση

- Μέχρι να αδειάσει η ουρά:
  - Βγάζουμε το πρώτο στοιχείο, ελέγχουμε τους γείτονές του και προσπαθούμε να δώσουμε ετικέτα σε όσους είναι Ι
  - Ελέγχουμε για κάθε γείτονα αν μπορούμε να κάνουμε άμεσο χρωματισμό
  - Αλλιώς μειώνουμε τον μετρητή του γείτονα που δε μπορούμε να χρωματίσουμε άμεσα κατά 1 και όταν γίνει 0 κάνουμε έμμεσο χρωματισμό
- Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν αδειάσει η ουρά, οπότε και δε μπορούμε να κάνουμε άλλους χρωματισμούς

Πολυπλοκότητα Η πολυπλοκότητα του προηγούμενου αλγορίθμου είναι γραμμική στο μέγεθος του νέου γράφου που κατασκευάσαμε, άρα το συνολικό κόστος είναι $O(V^2 + VE)$

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση

- Μέχρι να αδειάσει η ουρά:
  - Βγάζουμε το πρώτο στοιχείο, ελέγχουμε τους γείτονές του και προσπαθούμε να δώσουμε ετικέτα σε όσους είναι Ι
  - Ελέγχουμε για κάθε γείτονα αν μπορούμε να κάνουμε άμεσο χρωματισμό
  - Αλλιώς μειώνουμε τον μετρητή του γείτονα που δε μπορούμε να χρωματίσουμε άμεσα κατά 1 και όταν γίνει 0 κάνουμε έμμεσο χρωματισμό
- Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν αδειάσει η ουρά, οπότε και δε μπορούμε να κάνουμε άλλους χρωματισμούς

Πολυπλοκότητα Η πολυπλοκότητα του προηγούμενου αλγορίθμου είναι γραμμική στο μέγεθος του νέου γράφου που κατασκευάσαμε, άρα το συνολικό κόστος είναι $O(V^2 + VE)$

Άσκηση 3: Κλέφτες και Αστυνόμοι

Λύση

- Μέχρι να αδειάσει η ουρά:
  - Βγάζουμε το πρώτο στοιχείο, ελέγχουμε τους γείτονές του και προσπαθούμε να δώσουμε ετικέτα σε όσους είναι I
  - Ελέγχουμε για κάθε γείτονα αν μπορούμε να κάνουμε άμεσο χρωματισμό
  - Αλλιώς μειώνουμε τον μετρητή του γείτονα που δε μπορούμε να χρωματίσουμε άμεσα κατά 1 και όταν γίνει 0 κάνουμε έμμεσο χρωματισμό
- Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν αδειάσει η ουρά, οπότε και δε μπορούμε να κάνουμε άλλους χρωματισμούς

Πολυπλοκότητα Η πολυπλοκότητα του προηγούμενου αλγορίθμου είναι γραμμική στο μέγεθος του νέου γράφου που κατασκευάσαμε, άρα το συνολικό κόστος είναι $O(V^2 + VE)$

Outline

Άσκηση 4α: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

4α)

- Έστω T_1, T_2 δύο διαφορετικά συνδετικά δετρα και $e \in T_2 \setminus T1$ $(T_2 \setminus T1 \neq \emptyset)$
- $T_1 \cup \{e\}$ περιέχει κύκλο C. Υπάρχει ακμή $e' \in C$, $e' \notin T_2$ (Αλλίως T_2 περιέχει τον C)
- $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ είναι άκυκλο με $n-1$ ακμές $\implies$ Συνδετικό δέντρο.

Εύρεση e'

Εστω T_1, T_2 και $e = \{u, v\}$.

- Σε $O(|V|)$ κάνουμε Διάσχιση κατά Βάθος από το u στο v στο δέντρο T_1 και βρίσκουμε μονοπάτι P που τους συνδέει.
- Για κάθε $e \in P$ ελεγχούμε σε $O(1)$ αν ανήκει στο T_2 και μόλις βρούμε $e \in P, e \notin T_2$ την αφαιρουμε. Συνολικά, $O(|V|)$.

Άσκηση 4β: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

Ιδιότητα

Έστω $T_1, T_2 \in H$ και $d_H(T_1, T_2)$ το μήκος του συντομότερο μονοπατιού μεταξύ T_1, T_2 στο H. Τότε $|T_1 \setminus T_2| = k$ ανν $d_H(T_1, T_2) = k$.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε Επαγωγή στο μήκος του μονοπατιού:

- Επαγωγική Βάση: Από ορισμό του H, $|T_1 \setminus T_2| = 1$ ανν $d_H(T_1, T_2) = 1$.
- Επαγωγική Υπόθεση: $|T_1 \setminus T_2| = k$ ανν $d_H(T_1, T_2) = k$.
- Επαγωγική Βήμα: Θ.δ.ο. $|T_1 \setminus T_2| = k + 1$ ανν $d_H(T_1, T_2) = k + 1$

Άσκηση 4: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

Απόδειξη Επαγωγικού Βήματος

- $\Longrightarrow$ Εστω $e \in T_1 \backslash T_2$. Λόγω (α), υπαρχει $e' \in T_2 \backslash T_1$ τ.ω. $T_1' = (T_1 \backslash \{e\}) \cup \{e'\} \in H$. Αλλά, $|T_1' \backslash T_2| = k \Longrightarrow_{\text{Ε.Υ.}}$ $d_H(T_1, T_2) \leq k + 1$. Από Ε.Υ. αν $d_H(T_1, T_2) = k$ τότε $d_H(T_1, T_2) = k$. Άτοπο ($|T_1 \backslash T_2| = k + 1$) Αρα, $d_H(T_1, T_2) \geq k + 1 \Longrightarrow d_H(T_1, T_2) = k + 1$.
- $\Longleftarrow$ Εφόσον $d_H(T_1, T_2) = k + 1$ υπάρχει $T_1' \in H$ τ.ω. $d_H(T_1, T_1') = 1, d_H(T_1', T_2) = k$. Από Ε.Υ. $|T_1' \backslash T_2| = k$. Άρα, $|T_1 \backslash T_2| = k - 1$ ή $|T_1 \backslash T_2| = k + 1$. Αν $|T1 \backslash T_2| = k - 1 \Longrightarrow_{\text{Ε.Ψ.}}$ $d_H(T_1, T_2) = k - 1$ Άτοπο

Άσκηση 4: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

Υπολογισμός Συντομότερου Μονοπατιού

- Υπολογίζουμε το σύνολο ακμών $T_2 \setminus T_1$.
- Για κάθε $e \in T_2 \setminus T_1$ προσθέτουμε την e στο υπάρχον δέντρο.

Ορθότητα

Αν $T_2 \setminus T_1 = k$ τότε σε k βήματα έχουμε μετατρέψει το T_1 σε T_2. Αρα, έχουμε βρει μονοπάτι στο H μήκους $k \implies$ Το συντομότερο μονοπάτι.

Πολυπλοκότητα

Σε $O(|V|)$ αποθηκεύουμε το T_1 ως *rooted* δέντρο (κάθε κόμβος δείχνει στον πατέρα του). Για κάθε ακμή $e \in T_2$ ελέγχουμε σε $O(1)$ αν $e \in T_1$. Αρα, $O(|V|)$. Κάνουμε k ανανεώσεις ακμών σε $O(|V|)$ βήματα. Σύνολο, $O(k \cdot |V|)$.

Άσκηση 4γ: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

Αλγόριθμος

- Αν $|E_1| < k$, προφανώς δεν υπάρχει το ζητούμενο ΣΔ. Θέτουμε στις ακμές του συνόλου E_1 βάρος 1, και στις ακμές του συνόλου E_2 βάρος 0.
- Εκτελούμε τον αλγόριθμο Kruskal στο γράφημα που προκύπτει, οπότε λαμβάνουμε ένα ΕΣΔ T_1 .
- Αν $w(T_1) > k$, τότε δεν υπάρχει το ζητούμενο ΕΣΔ.
- Εστω k_1 το πλήθος των ακμών του $T_1 \cap E_1$.
- Θεωρούμε το γράφημα G' που περιέχει μόνο αυτές τις k_1 ακμές.
- Θέτουμε στο G' , $w(E_1 \backslash (T_1 \cap E_1)) = 0$ και $w(E_2) = 1$.
- Εκτελούμε τον αλγόριθμο Kruskal στο G', προσθέτοντας ακμές ώσπου να έχουμε συνολικά k ακμές του συνόλου E_1.
- Η εκτέλεση του Kruskal συνεχίζεται με τις ακμές του συνόλου E_2, μέχρι το G' να γίνει συνεκτικό.
- Ονομάζουμε το γράφημα που προκύπτει G_1 και το επιστρέφουμε ως ΣΔ του G.

Άσκηση 4γ: Το σύνολο των Συνδετικών Δέντρων

Ορθότητα

- Εστω το $G" = G_1 \cup E_2$. Το G'' έχει ως ΣΔ το T_1 επομένως είναι συνεκτικό. Η εκτέλεση του αλγορίθμου Kruskal στο G'' θα επιστρέψει ως ΕΣΔ το G_1 , επομένως το G' κάποια στιγμή θα γίνει συνεκτικό.
- Προφανώς, στο G_1 υπάρχουν ακριβώς k ακμές του E_1 , από τον ορισμό του αλγορίθμου.

Πολυπλοκότητα

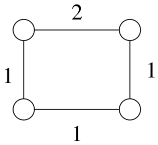
$O(m * logm)$ λόγω του αλγορίθμου *Kruskal*.

Outline

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (1 / 10)

(α) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Ισχύει ότι αν όλες οι ακμές έχουν διαφορετικά βάρη, τότε το MST του G είναι μοναδικό. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

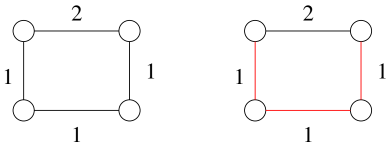
<u>Αντιπαράδειγμα</u>



Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (1 / 10)

(α) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Ισχύει ότι αν όλες οι ακμές έχουν διαφορετικά βάρη, τότε το MST του G είναι μοναδικό. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>



Unique MST of cost 3

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (2 / 10)

(β) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Απόδειξη.

- Έστω ότι έχουμε δύο MST, με $e \in T_1$ και $e \notin T_2$.
- Αφαιρώντας την $e = (u, v)$ από το T_1, χωρίζουμε το T_1 σε 2 δέντρα, με σύνολα κόμβων S και $V \setminus S$ αντίστοιχα.
- Βάσει υπόθεσης, έχουμε μοναδική e_S ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, και αφού T_1 είναι MST, προφανώς $e_S = e$.
- Αφού $e \notin T_2$, και T_2 MST, υπάρχει μονοπάτι $P_{uv} \subseteq T_2$, και άρα υπάρχει $e' \in P_{uv}$, που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, με $w(e') > w(e)$.
- Παρατηρούμε τώρα ότι το $P_{uv} \cup \{e\}$ είναι κύκλος με τις e, e' να διασχίζουν την $(S, V \setminus S)$. Άρα $(T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ είναι spanning tree με κόστος μικρότερο από το $T_2 \Rightarrow$ άτοπο. □

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (2 / 10)

(β) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Απόδειξη.

- Έστω ότι έχουμε δύο MST, με $e \in T_1$ και $e \notin T_2$.
- Αφαιρώντας την $e = (u, v)$ από το T_1, χωρίζουμε το T_1 σε 2 δέντρα, με σύνολα κόμβων S και $V \setminus S$ αντίστοιχα.
- Βάσει υπόθεσης, έχουμε μοναδική e_S ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, και αφού T_1 είναι MST, προφανώς $e_S = e$.
- Αφού $e \notin T_2$, και T_2 MST, υπάρχει μονοπάτι $P_{uv} \subseteq T_2$, και άρα υπάρχει $e' \in P_{uv}$, που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, με $w(e') > w(e)$.
- Παρατηρούμε τώρα ότι το $P_{uv} \cup \{e\}$ είναι κύκλος με τις e, e' να διασχίζουν την $(S, V \setminus S)$. Άρα $(T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ είναι spanning tree με κόστος μικρότερο από το $T_2 \Rightarrow$ άτοπο.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (2 / 10)

(β) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Απόδειξη.

- Έστω ότι έχουμε δύο MST, με $e \in T_1$ και $e \notin T_2$.
- Αφαιρώντας την $e = (u, v)$ από το T_1, χωρίζουμε το T_1 σε 2 δέντρα, με σύνολα κόμβων S και $V \setminus S$ αντίστοιχα.
- Βάσει υπόθεσης, έχουμε μοναδική e_S ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, και αφού T_1 είναι MST, προφανώς $e_S = e$.
- Αφού $e \notin T_2$, και T_2 MST, υπάρχει μονοπάτι $P_{uv} \subseteq T_2$, και άρα υπάρχει $e' \in P_{uv}$, που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, με $w(e') > w(e)$.
- Παρατηρούμε τώρα ότι το $P_{uv} \cup \{e\}$ είναι κύκλος με τις e, e' να διασχίζουν την $(S, V \setminus S)$. Άρα $(T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ είναι spanning tree με κόστος μικρότερο από το $T_2 \Rightarrow$ άτοπο. □

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (2 / 10)

(β) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Απόδειξη.

- Έστω ότι έχουμε δύο MST, με $e \in T_1$ και $e \notin T_2$.
- Αφαιρώντας την $e = (u, v)$ από το T_1, χωρίζουμε το T_1 σε 2 δέντρα, με σύνολα κόμβων S και $V \setminus S$ αντίστοιχα.
- Βάσει υπόθεσης, έχουμε μοναδική e_S ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, και αφού T_1 είναι MST, προφανώς $e_S = e$.
- Αφού $e \notin T_2$, και T_2 MST, υπάρχει μονοπάτι $P_{uv} \subseteq T_2$, και άρα υπάρχει $e' \in P_{uv}$, που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, με $w(e') > w(e)$.
- Παρατηρούμε τώρα ότι το $P_{uv} \cup \{e\}$ είναι κύκλος με τις e, e' να διασχίζουν την $(S, V \setminus S)$. Άρα $(T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ είναι spanning tree με κόστος μικρότερο από το $T_2 \Rightarrow$ άτοπο.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (2 / 10)

(β) Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Απόδειξη.

- Έστω ότι έχουμε δύο MST, με $e \in T_1$ και $e \notin T_2$.
- Αφαιρώντας την $e = (u, v)$ από το T_1, χωρίζουμε το T_1 σε 2 δέντρα, με σύνολα κόμβων S και $V \setminus S$ αντίστοιχα.
- Βάσει υπόθεσης, έχουμε μοναδική e_S ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, και αφού T_1 είναι MST, προφανώς $e_S = e$.
- Αφού $e \notin T_2$, και T_2 MST, υπάρχει μονοπάτι $P_{uv} \subseteq T_2$, και άρα υπάρχει $e' \in P_{uv}$, που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, με $w(e') > w(e)$.
- Παρατηρούμε τώρα ότι το $P_{uv} \cup \{e\}$ είναι κύκλος με τις e, e' να διασχίζουν την $(S, V \setminus S)$. Άρα $(T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ είναι spanning tree με κόστος μικρότερο από το $T_2 \Rightarrow$ άτοπο. $\square$

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (3 / 10)

(β) Δείξαμε λοιπόν ότι αν σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E, w)$ για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (3 / 10)

(β) Δείξαμε λοιπόν ότι αν σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E, w)$ για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

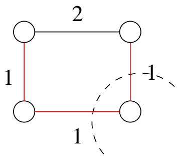
Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (3 / 10)

(β) Δείξαμε λοιπόν ότι αν σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E, w)$ για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ η ακμή ελαχίστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό MST.

Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

<u>Αντιπαράδειγμα</u> (ίδιο με πριν)



Unique MST of cost 3

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (4 / 10)

(γ) Πρόβλημα: Αναζητούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να έχουμε μοναδικό MST.

- Σκεπτόμενοι αλγοριθμικά την περίπτωση που έχουμε 2 διαφορετικά MST's και θέλουμε να μετατρέψουμε το ένα στο άλλο, βλέπουμε ότι σε κάθε βήμα αυτής της μετατροπής σχηματίζουμε έναν κύκλο, από τον οποίο πρέπει να αφαιρέσουμε μια ακμή. Για να κρατήσουμε το κόστος στο ίδιο επίπεδο, χρειάζεται οι κύκλοι αυτοί να έχουν τουλάχιστον 2 ακμές ίσου μεγίστου βάρους, ώστε να μπορούμε να αφαιρέσουμε τη μία από αυτές.
- Το σκεπτικό αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη: το MST T είναι μοναδικό αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (4 / 10)

(γ) Πρόβλημα: Αναζητούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να έχουμε μοναδικό MST.

- Σκεπτόμενοι αλγοριθμικά την περίπτωση που έχουμε 2 διαφορετικά MST's και θέλουμε να μετατρέψουμε το ένα στο άλλο, βλέπουμε ότι σε κάθε βήμα αυτής της μετατροπής σχηματίζουμε έναν κύκλο, από τον οποίο πρέπει να αφαιρέσουμε μια ακμή. Για να κρατήσουμε το κόστος στο ίδιο επίπεδο, χρειάζεται οι κύκλοι αυτοί να έχουν τουλάχιστον 2 ακμές ίσου μεγίστου βάρους, ώστε να μπορούμε να αφαιρέσουμε τη μία από αυτές.
- Το σκεπτικό αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη: το MST T είναι μοναδικό αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (4 / 10)

(γ) Πρόβλημα: Αναζητούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να έχουμε μοναδικό MST.

- Σκεπτόμενοι αλγοριθμικά την περίπτωση που έχουμε 2 διαφορετικά MST's και θέλουμε να μετατρέψουμε το ένα στο άλλο, βλέπουμε ότι σε κάθε βήμα αυτής της μετατροπής σχηματίζουμε έναν κύκλο, από τον οποίο πρέπει να αφαιρέσουμε μια ακμή. Για να κρατήσουμε το κόστος στο ίδιο επίπεδο, χρειάζεται οι κύκλοι αυτοί να έχουν τουλάχιστον 2 ακμές ίσου μεγίστου βάρους, ώστε να μπορούμε να αφαιρέσουμε τη μία από αυτές.
- Το σκεπτικό αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη: το MST T είναι μοναδικό αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (5 / 10)

Πρόταση: Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Ο G έχει μοναδικό MST T, αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω T το μοναδικό MST του G. Τότε προφανώς αν προσθέσουμε οποιαδήποτε ακμή $e \notin T$, σχηματίζεται κύκλος, και αφού το T είναι μοναδικό, τότε σίγουρα η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους του κύκλου αυτού (αλλιώς, αν υπήρχε και άλλη τέτοια, έστω e', τότε το $(T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ θα ήταν επίσης MST).

($\Leftarrow$) Έστω T_1 MST με την δοσμένη ιδιότητα, και έστω $T_2 \neq T_1$, επίσης MST, και $e = (u, v)$, με $e \in T_2$ και $e \notin T_1$. Αν P_{uv} το μονοπάτι που ενώνει τις u, v στο T_1, με σύνολο κορυφών το V_{uv}, τότε το $P_{uv} \cup \{(u, v)\}$ είναι κύκλος που δημιουργείται στο T_1 με μοναδική ακμή μεγίστου βάρους την e. Για το T_2 έχουμε τώρα, σχηματικά:

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (5 / 10)

Πρόταση: Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Ο G έχει μοναδικό MST T, αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω T το μοναδικό MST του G. Τότε προφανώς αν προσθέσουμε οποιαδήποτε ακμή $e \notin T$, σχηματίζεται κύκλος, και αφού το T είναι μοναδικό, τότε σίγουρα η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους του κύκλου αυτού (αλλιώς, αν υπήρχε και άλλη τέτοια, έστω e', τότε το $(T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ θα ήταν επίσης MST).

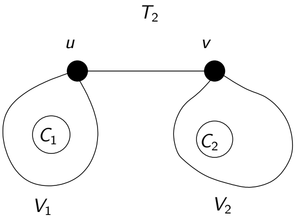
$(\Leftarrow)$ Έστω T_1 MST με την δοσμένη ιδιότητα, και έστω $T_2 \neq T_1$, επίσης MST, και $e = (u, v)$, με $e \in T_2$ και $e \notin T_1$. Αν P_{uv} το μονοπάτι που ενώνει τις u, v στο T_1, με σύνολο κορυφών το V_{uv}, τότε το $P_{uv} \cup \{(u, v)\}$ είναι κύκλος που δημιουργείται στο T_1 με μοναδική ακμή μεγίστου βάρους την e. Για το T_2 έχουμε τώρα, σχηματικά:

Πρόταση: Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E, w)$. Ο G έχει μοναδικό MST T, αν και μόνο αν για κάθε $e \notin T$, η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους στον κύκλο που σχηματίζεται στο T αν προσθέσουμε την e.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω T το μοναδικό MST του G. Τότε προφανώς αν προσθέσουμε οποιαδήποτε ακμή $e \notin T$, σχηματίζεται κύκλος, και αφού το T είναι μοναδικό, τότε σίγουρα η e είναι η μοναδική ακμή μεγίστου βάρους του κύκλου αυτού (αλλιώς, αν υπήρχε και άλλη τέτοια, έστω e', τότε το $(T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ θα ήταν επίσης MST).

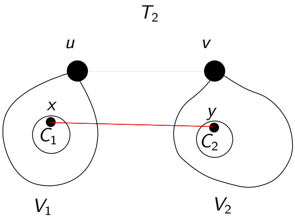
($\Leftarrow$) Έστω T_1 MST με την δοσμένη ιδιότητα, και έστω $T_2 \neq T_1$, επίσης MST, και $e = (u, v)$, με $e \in T_2$ και $e \notin T_1$. Αν P_{uv} το μονοπάτι που ενώνει τις u, v στο T_1, με σύνολο κορυφών το V_{uv}, τότε το $P_{uv} \cup \{(u, v)\}$ είναι κύκλος που δημιουργείται στο T_1 με μοναδική ακμή μεγίστου βάρους την e. Για το T_2 έχουμε τώρα, σχηματικά:

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (6 / 10)



$$C_1 \cup C_2 \cup \{u, v\} = V_{uv}$$
$$V_1 \cup V_2 = V$$

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (6 / 10)



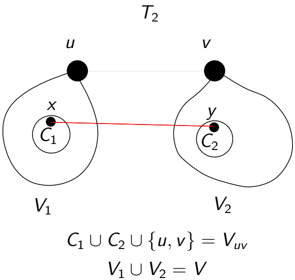
$C_1 \cup C_2 \cup \{u, v\} = V_{uv}$

$V_1 \cup V_2 = V$

Έστω τώρα (x, y) η ακμή του T_1 που διασχίζει την τομή (V_1, V_2) και ανήκει στο P_{uv}.

Το $(T_2 \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(x, y)\}$ είναι συνδετικό δέντρο, με βάρος αυστηρά μικρότερο από το βάρος του T_2, άτοπο αφού T_2 είναι MST.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (6 / 10)



Έστω τώρα (x, y) η ακμή του T_1 που διασχίζει την τομή (V_1, V_2) και ανήκει στο P_{uv}.

Το $(T_2 \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(x, y)\}$ είναι συνδετικό δέντρο, με βάρος αυστηρά μικρότερο από το βάρος του T_2, άτοπο αφού T_2 είναι MST.

Άρα το MST πρέπει να είναι **μοναδικό**.

(δ) Υλοποίηση

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος:

1. Υπολογίζουμε ένα MST T, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$ (ή και πιο γρήγορα, αν χρησιμοποιήσουμε καλύτερες δομές)
2. Στη συνέχεια, για κάθε ακμή $(u, v) \notin T$, βρίσκουμε το **μοναδικό** μονοπάτι $P_{uv} \in T$, και ελέγχουμε αν η (u, v) έχει αυστηρά μεγαλύτερο βάρος από κάθε ακμή του μονοπατιού. Συνολικά έχουμε $\Theta(n^2)$ ζευγάρια κορυφών, και για κάθε κορυφή μπορούμε να βρούμε τα μονοπάτια προς όλες τις άλλες, καθώς και τα ζητούμενα βάρη, με μία DFS στο δέντρο $T \Rightarrow$ κόστος $|V| \cdot O(|V| + |E|) = O(|V|^2)$.

Συνολικό κόστος: $O(|E| \log |V| + |V|^2 + |E|) = O(|E| \log |V| + |V|^2)$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (7 / 10)

(δ) Υλοποίηση

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος:

1. Υπολογίζουμε ένα MST T, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$ (ή και πιο γρήγορα, αν χρησιμοποιήσουμε καλύτερες δομές)
2. Στη συνέχεια, για κάθε ακμή $(u, v) \notin T$, βρίσκουμε το **μοναδικό** μονοπάτι $P_{uv} \in T$, και ελέγχουμε αν η (u, v) έχει αυστηρά μεγαλύτερο βάρος από κάθε ακμή του μονοπατιού. Συνολικά έχουμε $\Theta(n^2)$ ζευγάρια κορυφών, και για κάθε κορυφή μπορούμε να βρούμε τα μονοπάτια προς όλες τις άλλες, καθώς και τα ζητούμενα βάρη, με μία DFS στο δέντρο $T \Rightarrow$ κόστος $|V| \cdot O(|V| + |E|) = O(|V|^2)$.

Συνολικό κόστος: $O(|E| \log |V| + |V|^2 + |E|) = O(|E| \log |V| + |V|^2)$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (7 / 10)

(δ) Υλοποίηση

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος:

1. Υπολογίζουμε ένα MST T, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$ (ή και πιο γρήγορα, αν χρησιμοποιήσουμε καλύτερες δομές)
2. Στη συνέχεια, για κάθε ακμή $(u, v) \notin T$, βρίσκουμε το **μοναδικό** μονοπάτι $P_{uv} \in T$, και ελέγχουμε αν η (u, v) έχει αυστηρά μεγαλύτερο βάρος από κάθε ακμή του μονοπατιού. Συνολικά έχουμε $\Theta(n^2)$ ζευγάρια κορυφών, και για κάθε κορυφή μπορούμε να βρούμε τα μονοπάτια προς όλες τις άλλες, καθώς και τα ζητούμενα βάρη, με μία DFS στο δέντρο $T \Rightarrow$ κόστος $|V| \cdot O(|V| + |E|) = O(|V|^2)$.

Συνολικό κόστος: $O(|E| \log |V| + |V|^2 + |E|) = O(|E| \log |V| + |V|^2)$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (8 / 10)

Λεπτομέρειες Υλοποίησης

DFS

- Για κάθε κορυφή v, εκτελούμε μία DFS, κρατώντας για κάθε άλλη κορυφή q έναν αριθμό $m(q)$ που δείχνει το μέγιστο βάρος ακμής στο μονοπάτι από το v στο q.
- Αυτό γίνεται ως εξής: σε κάθε βήμα της DFS, αν από τον κόμβο q επισκεφθούμε τον r, τότε $m(r) = \max\{m(q), w(q, r)\}$.
- Στο τέλος λοιπόν μιας DFS που ξεκίνησε από τον κόμβο v έχουμε τα μέγιστα βάρη ακμών για όλα τα μονοπάτια μεταξύ v, r, για $r \in V$.
- Εκτελώντας τελικά $|V|$ DFS's, μία για κάθε κορυφή, έχουμε τα ζητούμενα βάρη που θα συγκρίνουμε με τα βάρη των ακμών $e \notin T$, για κάθε ζεύγος $(u, v) \in E \setminus T$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (8 / 10)

Λεπτομέρειες Υλοποίησης

DFS

- Για κάθε κορυφή v, εκτελούμε μία DFS, κρατώντας για κάθε άλλη κορυφή q έναν αριθμό $m(q)$ που δείχνει το μέγιστο βάρος ακμής στο μονοπάτι από το v στο q.
- Αυτό γίνεται ως εξής: σε κάθε βήμα της DFS, αν από τον κόμβο q επισκεφθούμε τον r, τότε $m(r) = \max\{m(q), w(q, r)\}$.
- Στο τέλος λοιπόν μιας DFS που ξεκίνησε από τον κόμβο v έχουμε τα μέγιστα βάρη ακμών για όλα τα μονοπάτια μεταξύ v, r, για $r \in V$.
- Εκτελώντας τελικά $|V|$ DFS's, μία για κάθε κορυφή, έχουμε τα ζητούμενα βάρη που θα συγκρίνουμε με τα βάρη των ακμών $e \notin T$, για κάθε ζεύγος $(u, v) \in E \setminus T$.

Λεπτομέρειες Υλοποίησης

DFS

- Για κάθε κορυφή v, εκτελούμε μία DFS, κρατώντας για κάθε άλλη κορυφή q έναν αριθμό $m(q)$ που δείχνει το μέγιστο βάρος ακμής στο μονοπάτι από το v στο q.
- Αυτό γίνεται ως εξής: σε κάθε βήμα της DFS, αν από τον κόμβο q επισκεφθούμε τον r, τότε $m(r) = \max\{m(q), w(q, r)\}$.
- Στο τέλος λοιπόν μιας DFS που ξεκίνησε από τον κόμβο v έχουμε τα μέγιστα βάρη ακμών για όλα τα μονοπάτια μεταξύ v, r, για $r \in V$.
- Εκτελώντας τελικά $|V|$ DFS's, μία για κάθε κορυφή, έχουμε τα ζητούμενα βάρη που θα συγκρίνουμε με τα βάρη των ακμών $e \notin T$, για κάθε ζεύγος $(u, v) \in E \setminus T$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (8 / 10)

Λεπτομέρειες Υλοποίησης

DFS

- Για κάθε κορυφή v, εκτελούμε μία DFS, κρατώντας για κάθε άλλη κορυφή q έναν αριθμό $m(q)$ που δείχνει το μέγιστο βάρος ακμής στο μονοπάτι από το v στο q.
- Αυτό γίνεται ως εξής: σε κάθε βήμα της DFS, αν από τον κόμβο q επισκεφθούμε τον r, τότε $m(r) = \max\{m(q), w(q, r)\}$.
- Στο τέλος λοιπόν μιας DFS που ξεκίνησε από τον κόμβο v έχουμε τα μέγιστα βάρη ακμών για όλα τα μονοπάτια μεταξύ v, r, για $r \in V$.
- Εκτελώντας τελικά $|V|$ DFS's, μία για κάθε κορυφή, έχουμε τα ζητούμενα βάρη που θα συγκρίνουμε με τα βάρη των ακμών $e \notin T$, για κάθε ζεύγος $(u, v) \in E \setminus T$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (9 / 10)

Bonus!!

Θα τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο του Kruskal, που ούτως ή άλλως περιλαμβάνει τον εντοπισμό πιθανών κύκλων, ώστε να διαπιστώσουμε αν έχουμε μοναδικό MST, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$.

- Αρχικά, ταξινομούμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές.
- Για κάθε νέα τιμή βάρους που συναντάμε, εξετάζουμε μία προς μία τις ακμές αυτές με τέτοιο βάρος και αφαιρούμε όσες σχηματίζουν κύκλο με το υπάρχον δάσος. Αυτές σίγουρα δε 'χαλάνε' τη μοναδικότητα του MST, καθώς είναι μοναδικές ακμές μεγίστου βάρους για τους κύκλους που προκύπτουν (παρατηρείστε ότι αν δημιουργούν κύκλο με το υπάρχον δάσος, δε γίνεται να δημιουργήσουν κύκλο και με βαρύτερες ακμές που θα προστεθούν στη συνέχεια, καθώς τότε το τελικό μας spanning γράφημα δε θα ήταν δέντρο)

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (9 / 10)

Bonus!!

Θα τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο του Kruskal, που ούτως ή άλλως περιλαμβάνει τον εντοπισμό πιθανών κύκλων, ώστε να διαπιστώσουμε αν έχουμε μοναδικό MST, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$.

- Αρχικά, ταξινομούμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές.
- Για κάθε νέα τιμή βάρους που συναντάμε, εξετάζουμε μία προς μία τις ακμές αυτές με τέτοιο βάρος και αφαιρούμε όσες σχηματίζουν κύκλο με το υπάρχον δάσος. Αυτές σίγουρα δε 'χαλάνε' τη μοναδικότητα του MST, καθώς είναι μοναδικές ακμές μεγίστου βάρους για τους κύκλους που προκύπτουν (παρατηρείστε ότι αν δημιουργούν κύκλο με το υπάρχον δάσος, δε γίνεται να δημιουργήσουν κύκλο και με βαρύτερες ακμές που θα προστεθούν στη συνέχεια, καθώς τότε το τελικό μας spanning γράφημα δε θα ήταν δέντρο)

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (9 / 10)

Bonus!!

Θα τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο του Kruskal, που ούτως ή άλλως περιλαμβάνει τον εντοπισμό πιθανών κύκλων, ώστε να διαπιστώσουμε αν έχουμε μοναδικό MST, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$.

- Αρχικά, ταξινομούμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές.
- Για κάθε νέα τιμή βάρους που συναντάμε, εξετάζουμε μία προς μία τις ακμές αυτές με τέτοιο βάρος και αφαιρούμε όσες σχηματίζουν κύκλο με το υπάρχον δάσος. Αυτές σίγουρα δε 'χαλάνε' τη μοναδικότητα του MST, καθώς είναι μοναδικές ακμές μεγίστου βάρους για τους κύκλους που προκύπτουν (παρατηρείστε ότι αν δημιουργούν κύκλο με το υπάρχον δάσος, δε γίνεται να δημιουργήσουν κύκλο και με βαρύτερες ακμές που θα προστεθούν στη συνέχεια, καθώς τότε το τελικό μας spanning γράφημα δε θα ήταν δέντρο)

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (9 / 10)

Bonus!!

Θα τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο του Kruskal, που ούτως ή άλλως περιλαμβάνει τον εντοπισμό πιθανών κύκλων, ώστε να διαπιστώσουμε αν έχουμε μοναδικό MST, σε χρόνο $O(|E| \log |V|)$.

- Αρχικά, ταξινομούμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές.
- Για κάθε νέα τιμή βάρους που συναντάμε, εξετάζουμε μία προς μία τις ακμές αυτές με τέτοιο βάρος και αφαιρούμε όσες σχηματίζουν κύκλο με το υπάρχον δάσος. Αυτές σίγουρα δε 'χαλάνε' τη μοναδικότητα του MST, καθώς είναι μοναδικές ακμές μεγίστου βάρους για τους κύκλους που προκύπτουν (παρατηρείστε ότι αν δημιουργούν κύκλο με το υπάρχον δάσος, δε γίνεται να δημιουργήσουν κύκλο και με βαρύτερες ακμές που θα προστεθούν στη συνέχεια, καθώς τότε το τελικό μας spanning γράφημα δε θα ήταν δέντρο)

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (10 / 10)

- Στη συνέχεια, τις ακμές που έχουν μείνει του βάρους που εξετάζουμε τις τοποθετούμε όλες μαζί στο ήδη υπάρχον δάσος. Κάθε μία ξεχωριστά σίγουρα δε δημιουργεί κύκλο, οπότε αν δημιουργηθεί κύκλος, τότε σε αυτόν σίγουρα συμμετέχουν τουλάχιστον 2 από αυτές. Στην περίπτωση αυτή, το MST δεν είναι μοναδικό. (γιατί;)
- Διαφορετικά, συνεχίζει κανονικά ο αλγόριθμος του Kruskal, και αν σε κανένα βήμα δε βρούμε τους κύκλους που προαναφέραμε, τότε το MST είναι μοναδικό.

Συνολικό κόστος = κόστος Kruskal = $O(|E| \log |V|)$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (10 / 10)

- Στη συνέχεια, τις ακμές που έχουν μείνει του βάρους που εξετάζουμε τις τοποθετούμε όλες μαζί στο ήδη υπάρχον δάσος. Κάθε μία ξεχωριστά σίγουρα δε δημιουργεί κύκλο, οπότε αν δημιουργηθεί κύκλος, τότε σε αυτόν σίγουρα συμμετέχουν τουλάχιστον 2 από αυτές. Στην περίπτωση αυτή, το MST δεν είναι μοναδικό. (γιατί;)
- Διαφορετικά, συνεχίζει κανονικά ο αλγόριθμος του Kruskal, και αν σε κανένα βήμα δε βρούμε τους κύκλους που προαναφέραμε, τότε το MST είναι μοναδικό.

Συνολικό κόστος = κόστος Kruskal = $O(|E| \log |V|)$.

Άσκηση 5: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου (10 / 10)

- Στη συνέχεια, τις ακμές που έχουν μείνει του βάρους που εξετάζουμε τις τοποθετούμε όλες μαζί στο ήδη υπάρχον δάσος. Κάθε μία ξεχωριστά σίγουρα δε δημιουργεί κύκλο, οπότε αν δημιουργηθεί κύκλος, τότε σε αυτόν σίγουρα συμμετέχουν τουλάχιστον 2 από αυτές. Στην περίπτωση αυτή, το MST δεν είναι μοναδικό. (γιατί;)
- Διαφορετικά, συνεχίζει κανονικά ο αλγόριθμος του Kruskal, και αν σε κανένα βήμα δε βρούμε τους κύκλους που προαναφέραμε, τότε το MST είναι μοναδικό.

Συνολικό κόστος = κόστος Kruskal = $O(|E| \log |V|)$.

Outline

Προγραμματιστική Άσκηση 1: Υποβρύχιο Τρίτων

Είσοδος: Οι αριθμοί N, M, K και X και οι συντεταγμένες των πιλοτικών διαβάσεων.

Έξοδος: Το πλήθος (mod 1000000103) όλων των μονοπατιών, που χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, με συντεταγμένες (N - 1, M - 1), στην τελική του θέση, με συντεταγμένες (0, 0).

Λύση1:

- Θεωρούμε τον τρισδιάστατο πίνακα $grid[N][M][X+1]$, όπου το στοιχείο $grid[i][j][k]$ εκφράζει το πλήθος (mod 1000000103) όλων των μονοπατιών που χρησιμοποιούν ακριβώς k πιλοτικές διαβάσεις και οδηγούν το υποβρύχιο από την θέση, με συντεταγμένες (i, j), στην τελική του θέση, με συντεταγμένες (0, 0).
    - Ισχύει ότι $grid[0][0][0] = 1$ και $grid[0][0][k] = 0$, για κάθε k ε $(0, X + 1)$.
    - Στην περίπτωση, που δεν ξεκινά κάποια πιλοτική διάβαση από το σημείο (i, j), ισχύει ότι $grid[i][j][k] = (grid[i][j-1][k] + grid[i-1][j][k])$ mod 1000000103 (ειδικές περιπτώσεις για $i = 0$ ή $j = 0$), για κάθε $k < X + 1$.
    - Έστω, ότι από το σημείο (i, j) ξεκινά πιλοτική διάβαση, η οποία καταλήγει στο σημείο (x, y), τότε ισχύει ότι $grid[i][j][0] = 0$ και $grid[i][j][k] = grid[x][y][k-1]$, για κάθε k ε $(0, x + 1)$.

Προγραμματιστική Άσκηση 1: Υποβρύχιο Τρίτων

- Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το $(\sum_{k=0}^{X} grid[N - 1][M - 1][k])$ mod 1000000103.
- Ξεκινώντας από το σημείο (0, 0), μπορούμε είτε να εφαρμόσουμε *BFS* στο πλέγμα, είτε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η κλίση κάθε πιλοτικής διάβασης ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι τουλάχιστον 90 μοίρες και να διασχίσουμε το πλέγμα από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω, για ευκολία και εξοικονόμηση χώρου.

Πολυπλοκότητα:

- Χρονική, $O(NMX)$.
- Χωρική, $O(MX)$.

Λύση 2:

- Αρχικά κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο δέντρο T, με βάρη στις ακμές του. Το T, αποτελείται από συνολικά $K + 2$ κορυφές, μία για κάθε πιλοτική διάβαση και άλλες δύο για το αρχικό και το τελικό σημείο του πλέγματος, αντίστοιχα. Μεταξύ δύο κορυφών A και B, του T, υπάρχει ακμή με κατεύθυνση από το A, προς το B, αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι, που να συνδέει το τελικό σημείο της πιλοτικής διάβασης, που αντιστοιχεί στην κορυφή B, με το αρχικό σημείο της πιλοτικής διάβασης, που αντιστοιχεί στην κορυφή A. Επίσης, υπάρχει μια ακμή από την κορυφή, που αντιστοιχεί στο τελικό σημείο του πλέγματος, προς όλες τις άλλες κορυφές (αντιμετωπίζεται σαν αρχικό σημείο πιλοτικής διάβασης) και μια ακμή από κάθε κορυφή του T, προς την κορυφή που αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο του πλέγματος (αντιμετωπίζεται σαν τελικό σημείο πιλοτικής διάβασης).

- Το βάρος κάθε ακμής, αποτελείται από ένα διάνυσμα, που περιέχει τα πλήθη όλων των μονοπατιών που συνδέουν τα δύο σημεία χρησιμοποιώντας ακριβώς $k < X + 1$ πιλοτικές διαβάσεις.
- Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε ένα *BFS* στο T και υπολογίζουμε το ζητούμενο πλήθος μονοπατιών.
- Για να αποφύγουμε υπερχείλιση στα ενδιάμεσα αποτελέσματα, θα χρειαστεί να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων της πράξης *mod*, καθώς και του αλγορίθμου ύψωσης σε δύναμη.

Πολυπλοκότητα:

- Στην ουσία, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το πλήθος των μονοπατιών, μεταξύ όλων των αρχικών σημείων των πιλοτικών διαβάσεων, αλλά και όσων συνδέουν την αρχή μιας πιλοτικής διάβασης με το τέλος μιας άλλης για όλα τα $k < X$. Πολυπλοκότητα $O(X * K^2)$.
- Το *BFS* στο T έχει επίσης χρονική πολυπλοκότητα $O(X * K^2)$.
- Άρα συνολικά $O(X * K^2)$ ή απλά $O(K^3)$.
- Δηλαδή, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος λύνει στιγμιότυπα με αυθαίρετα μεγάλα N και M.

Outline

Προγραμματιστική Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Είσοδος: Πλήθος κόμβων και δρόμων δικτύου, N και M και κόστη c_e για κάθε δρόμο e. Το δίκτυο είναι συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο και δεν περιέχει ανακυκλώσεις η πολλαπλές ακμές.

Έξοδος: Πλήθος ακμών που ανήκουν σε κάθε συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, πλήθος ακμών που δεν ανήκουν σε κανένα συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους και πλήθος ακμών που ανήκουν σε κάποια, αλλά όχι σε όλα τα υποδίκτυα ελάχιστου κόστους.

Προγραμματιστική Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Λύση με μοναδικά βάρη:

Ας λύσουμε πρώτα το πρόβλημα αν τα βάρη του γραφήματος ήταν όλα ίδια και ίσα με W.Παρατηρούμε (και είναι εύκολο να δείξουμε ότι) οι ακμές που συμμετέχουν σε όλα τα ΕΣΔ είναι αυτές που δεν ανήκουν σε κύκλο, δηλαδή οι γέφυρες του γραφήματος.

Οι υπόλοιπες ακμές που ανήκουν σε κύκλο ανήκουν σε κάποια ΕΣΔ, αφού αν στον εν λόγω κύκλο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ακμή εκτός από την ακμή που μας ενδιαφέρει, παίρνουμε ένα ΕΣΔ.

Ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε τις γέφυρες είναι ο αλγόριθμος του *Tarjan* ο οποίος τρέχει σε γραμμικό χρόνο. Συνεπώς έχουμε πολυπλοκότητα $O(N+M)$ για αυτή την ειδική περίπτωση του προβλήματος.

Λύση του γενικού προβλήματος:

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του *Kruskal* με την διαφορά πως ομαδοποιούμε τις ακμές που έχουν ίδιο βάρος σε *buckets* και επεξεργαζόμαστε κάθε *bucket* ξεχωριστά. Έστω πως έχουμε τρέξει τον αλγόριθμο του *Kruskal* για κάποιο αριθμό επαναλήψεων και λαμβάνουμε ένα *bucket* με βάρη ακμών B.

Έχοντας τρέξει τον *Kruskal* έχουμε προφανώς κατασκευάσει τον γράφο των συνεκτικών συνιστωσών χρησιμοποιώντας την δομή $Union - Find$. Συνεπώς θεωρούμε πως δουλεύουμε σε έναν υπεργράφο, όπου αν δύο κορυφές έχουν ενωθεί στην δομή αποτελούν έναν κόμβο. Θα αναφερόμαστε σ' αυτόν τον υπεργράφο ως GU.

Προγραμματιστική Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Λύση του γενικού προβλήματος:

Έστω τώρα λοιπόν οι ακμές στο *bucket* με βάρος B. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Μια ακμή ε, ενώνει κορυφές στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Συνεπώς αποτελεί ανακύκλωση στον γράφο GU. Επομένως, αυτή η ακμή δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ, αφού οι κορυφές που ενώνει έχουν ενωθεί ήδη με κάποια μικρότερου βάρους ακμή σε κάποια προηγούμενη επανάληψη του *Kruskal*.
- Μια ακμή ε, ανήκει σε κύκλο στον γράφο GU. Συνεπώς, αυτή η ακμή δεν ανήκει σε όλα τα ΕΣΔ, αφού αφαιρώντας την μπορούμε πάλι να πετύχουμε συνεκτικότητα με το ίδιο κόστος. Ανήκει όμως σε κάποια εξ' αυτών.
- Μια ακμή ε, είναι γέφυρα στον γράφο GU. Επομένως, με παρόμοια αιτιολόγηση με την ειδική λύση αυτή η ακμή ανήκει σε όλα τα ΕΣΔ.

Προγραμματιστική Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

<u>Λύση του γενικού προβλήματος:</u>

Συνεπώς, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης γεφυρών του *Tarjan* στον γράφο *GU* και αφού τελειώσουμε με το *bucket* με βάρη ακμών B ανανεώνουμε τον γράφο *GU* κάνοντας τα απαραίτητα *Union* στην $Union - Find$ δομή μας. Προφανώς, κάθε φορά που βρίσκουμε τις γέφυρες ανανεώνουμε τους μετρητές για το κάθε είδος ακμής αντίστοιχα.

Πολυπλοκότητα: Τρέχουμε τον αλγόριθμο του *Kruskal* και για κάθε διακριτό βάρος ακμών κάνουμε κάτι γραμμικό ως προς το πόσες ακμές έχουν το συγκεκριμένο βάρος. Αθροιστικά λοιπόν έχουμε την πολυπλοκότητα του *Kruskal* + μια γραμμική συνολικά διαδικασία. Οπότε η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας παραμένει $O(MlogN)$ όπως και του *Kruskal*.