



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σουλίου

3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/1/2019

Άσκηση 1: Υποβρύχιο Τρίτων

Είναι μια ακόμα συνηθισμένη μέρα στο υποβρύχιο Τρίτων, μέχρι να χτυπήσει ξαφνικά το τηλέφωνο του Σημαιοφόρου βάρδιας. Στην άλλη άκρη της γραμμής βρίσκεται ο Υπασπιστής του Επιτελάρχη που απαιτεί να του σταλεί άμεσα 2 ΚΡ σε τριγωνικό ραντάρ! Επικρατεί σύγχυση, καθώς κανένα από τα μέλη του πληρώματος δεν γνωρίζει τι είναι αυτό. Κανένα, εκτός βέβαια από εσάς, που ως έμπειρος τεχνικός, αναλαμβάνετε να εκπληρώσετε το αίτημα και να σώσετε την ημέρα!

Αφού λοιπόν ανοίξατε το τριγωνικό ραντάρ, εμφανίζεται μπροστά σας ένα πλέγμα διαστάσεων $N \times M$. Παρατηρώντας το πλέγμα, μπορείτε να διακρίνετε πιλοτικές διαβάσεις. Μια πιλοτική διάβαση είναι μια ακμή που συνδέει δύο κουτάκια του πλέγματος μεταξύ τους. Οι μόνες κινήσεις, που μπορεί να πραγματοποιήσει το υποβρύχιο, είναι να μετακινηθεί κατά ένα κουτάκι προς τα αριστερά ή κατά ένα κουτάκι προς τα πάνω. Αν το υποβρύχιο βρίσκεται σε κουτάκι από όπου ξεκινά πιλοτική διάβαση, τότε πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη πιλοτική διάβαση και να μετακινηθεί στο κουτάκι όπου αυτή καταλήγει. Οπότε, αν δεν θέλουμε το υποβρύχιο να ακολουθήσει μια πιλοτική διάβαση, τότε το υποβρύχιο δεν πρέπει να περάσει από κουτάκι όπου βρίσκεται η αρχή της διάβασης (διαφορετικά θα είναι υποχρεωμένο να την ακολουθήσει). Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο να περάσει το υποβρύχιο από το κουτάκι όπου καταλήγει μια πιλοτική διάβαση.

Το περιεχόμενο του σήματος έχει σκοπό να επιβεβαιώσει ότι οι κινήσεις του υποβρυχίου δεν είναι εύκολα προβλέψιμες. Πρέπει λοιπόν να γράψουμε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το πλήθος όλων των μονοπατιών που ακολουθούν τους παραπάνω κανόνες, χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις, και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, στο κάτω-αριστερά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτικό είναι το κουτάκι $(N - 1, M - 1)$), στην τελική του θέση, στο πάνω-δεξιά σημείο του πλέγματος (που στο Ναυτικό είναι το κουτάκι $(0, 0)$). Το σήμα φυσικά θα περιέχει τον συνολικό αριθμό αυτών των μονοπατιών $\text{mod } 1000000103$, ώστε να μην ανησυχούμε για υποκλοπές.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάσει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, τους αριθμούς N , M , K και X . Σε καθμία από τις επόμενες K γραμμές θα δίνεται ένα ζευγάρι μη-αρνητικών ακέραιων s και e , χωρισμένων με ένα κενό διάστημα, που ορίζουν μια πιλοτική διάβαση. Θεωρώντας ότι το κάτω-δεξιά κουτάκι έχει συντεταγμένες $(N - 1, M - 1)$ και το πάνω-αριστερά έχει συντεταγμένες $(0, 0)$, το s δηλώνει ότι η πιλοτική διάβαση ξεκινά από το κουτάκι με συντεταγμένες $s.x = s/M$, $s.y = s \bmod M$ και καταλήγει στο κουτάκι με συντεταγμένες $e.x = e/M$, $e.y = e \bmod M$. Θα ισχύει ότι τα κουτάκια που αντιστοιχούν στα s και e θα βρίσκονται πάντα εντός πλέγματος. Θα ισχύει ακόμη ότι $s.x \geq e.x$ και $s.y \geq e.y$ (με τουλάχιστον μία από τις δύο ανισότητες να είναι αυστηρές) και ότι η αρχή και το τέλος μιας πιλοτικής διάβασης δεν συμπίπτουν με την αρχή ή το τέλος μιας άλλης.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας θα τυπώνει στο standard output το πλήθος ($\text{mod } 1000000103$) όλων των μονοπατιών που χρησιμοποιούν το πολύ X πιλοτικές διαβάσεις και οδηγούν το υποβρύχιο από την αρχική του θέση, στο κάτω-δεξιά σημείο $(N - 1, M - 1)$, στην τελική του θέση, στο πάνω δεξιά σημείο $(0, 0)$. Να είστε προσεκτικοί για περιπτώσεις υπερχείλισης των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
$2 \leq N, M \leq 180$	4 7 2 0	37
$0 \leq X \leq K \leq 100$	16 8	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	25 17	
Όριο μνήμης: 64 MB.	8 6 3 1	4 5 8
	37 24	
	25 12	
	28 21	

Άσκηση 2: Σχέδιο Ληστείας

Στην μακρινή Λεφτούπολη, μία τράπεζα διακινεί κάθε μέρα μεγάλα ποσά χρημάτων. Για τις χρηματοποστολές, χρησιμοποιεί ένα συνεκτικό υποδίκτυο του οδικού δικτύου της πόλης. Προκειμένου να μειώσει τις πιθανότητες ληστείας, κάθε πρωί εφαρμόζει μέτρα ασφαλείας στους δρόμους του υποδικτύου αυτού. Τα μέτρα ασφαλείας έχουν κόστος c_e για κάθε δρόμο e . Για ακόμα μεγαλύτερη ασφάλεια, η τράπεζα αλλάζει καθημερινά το υποδίκτυο που χρησιμοποιεί με βάση έναν σύνθετο αλγόριθμο που καθιστά εξαιρετικά δύσκολη την πρόβλεψη του υποδικτύου. Ωστόσο, ο καινούριος διευθυντής προκειμένου να μειώσει το κόστος αυτής της διαδικασίας, αποφάσισε ότι το δίκτυο που θα επιλέγεται θα είναι υποχρεωτικά ελάχιστου κόστους. Μία συμμορία ληστών, μαθαίνοντας την πληροφορία αυτή, αποφασίζει να αναλύσει το οδικό δίκτυο της πόλης και να προσδιορίσει με ακρίβεια τους πιθανούς δρόμους που θα χρησιμοποιήσει η χρηματοποστολή.

Η συμμορία σας προσφέρει σημαντική αμοιβή για ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει ποιοι δρόμοι θα χρησιμοποιηθούν σίγουρα για χρηματοποστολές, ποιοι σίγουρα όχι και ποιοι είναι αβέβαιοι.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιστοιχούν στο πλήθος των κόμβων και στο πλήθος των δρόμων του δικτύου. Οι κόμβοι του δικτύου αριθμούνται από 1 μέχρι N . Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα υπάρχουν τρεις φυσικοί αριθμοί a_e, b_e, c_e που δηλώνουν ότι ο δρόμος $e = \{a_e, b_e\}$ έχει κόστος c_e . Το δίκτυο είναι μη κατευθυνόμενο, θα είναι συνεκτικό και δεν θα περιέχει ανακυκλώσεις ή πολλαπλές ακμές.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output, σε τρεις διαδοχικές γραμμές, το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάθε συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, το πλήθος των ακμών που δεν ανήκουν σε κανένα συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους και το πλήθος των ακμών που ανήκουν σε κάποιο συνεκτικό υποδίκτυο ελάχιστου κόστους, αλλά όχι σε όλα.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 50.000$	3 3	0
$N - 1 \leq M \leq 500.000$	1 2 1	0
$1 \leq c_e \leq 200$	1 3 1	3
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 3 1	
Όριο μνήμης: 64 MB.	3 3	2
Στο 60% των αρχείων, θα υπάρχουν το πολύ 500 ακμές ίδιου βάρους.	1 2 1	1
	1 3 1	0
	2 3 2	