



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/3/2019

Άσκηση 1: Εφαρμογή Πλοήγησης

Έχουμε στη διάθεσή μας τον χάρτη μιας εξωτικής πόλης, ο οποίος αποτελείται από N τοποθεσίες και M δρόμους μονής κατεύθυνσης που συνδέουν αυτές τις τοποθεσίες. Για κάθε δρόμο από την τοποθεσία u προς την τοποθεσία v είναι γνωστό το μήκος του $d(u, v)$.

Θέλουμε να φτιάξουμε ένα σύστημα πλοήγησης που θα διευκολύνει τους οδηγούς να μεταβαίνουν από μία τοποθεσία σε μία άλλη. Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να υπολογίζουμε το μήκος της συντομότερης διαδρομής από μία τοποθεσία u σε μία τοποθεσία v .

Στα περισσότερα μέρη του κόσμου, οι οδηγοί σέβονται την κατεύθυνση των δρόμων. Στην πόλη μας όμως, μερικές φορές, οι οδηγοί γίνονται ανυπόμονοι και παραβιάζουν τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, οδηγώντας ανάποδα στους μονόδρομους! Αυτό είναι φυσικά παράνομο και εξαιρετικά επικίνδυνο! Οι οδηγοί που επιλέγουν να το κάνουν, προσπαθούν να περιορίσουν όσο περισσότερο γίνεται το πλήθος των παρανομιών που κάνουν σε μία διαδρομή, δηλαδή το πλήθος των δρόμων που θα οδηγήσουν με κατεύθυνση αντίθετη προς την κανονική. Το σύστημα πλοήγησης θέλουμε να “επιτρέπει” στους οδηγούς να κάνουν το πολύ K παρανομίες.

Δεδομένου του χάρτη και του K , θέλουμε να μπορούμε να απαντάμε σε ερωτήσεις της μορφής: “ποιο είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής από την τοποθεσία u στην τοποθεσία v , αν ο οδηγός είναι διατεθειμένος να παρανομήσει το πολύ p φορές;” (όπου $0 \leq p \leq K$).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάξει την είσοδό του από το standard input. Η πρώτη γραμμή της εισόδου θα περιέχει τέσσερις φυσικούς αριθμούς N , M , K και Q , χωρισμένους ανά δύο με ένα κενό διάστημα. Ο τελευταίος αριθμός Q είναι το πλήθος των ερωτήσεων που θα γίνουν.

Οι επόμενες M γραμμές αντιστοιχούν στους δρόμους. Κάθε μία θα περιέχει τρεις φυσικούς αριθμούς u , v και $d(u, v)$, χωρισμένους ανά δύο με ένα κενό διάστημα. Θα είναι $1 \leq u, v \leq N$, και $1 \leq d(u, v) \leq 10^6$.

Οι επόμενες Q γραμμές αντιστοιχούν στις ερωτήσεις. Κάθε μία θα περιέχει τρεις φυσικούς αριθμούς u , v και p , χωρισμένους ανά δύο με ένα κενό διάστημα. Θα είναι $1 \leq u, v \leq N$, και $0 \leq p \leq K$.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output Q γραμμές, κάθε μία από τις οποίες θα περιέχει έναν ακριβώς φυσικό αριθμό. Η k -οστή γραμμή της εξόδου θα περιέχει την απάντηση στην k -οστή ερώτηση. Αν για κάποια ερώτηση δεν υπάρχει διαδρομή από την τοποθεσία u στην τοποθεσία v με το πολύ p παρανομίες, η αντίστοιχη γραμμή της εξόδου πρέπει να περιέχει τη λέξη “IMPOSSIBLE”.

| Περιορισμοί: | Παράδειγμα Εισόδου: | Παράδειγμα Εξόδου: |
|-------------------------------|---------------------|--------------------|
| $2 \leq N \leq 100$ | 6 9 2 10 | 15 |
| $1 \leq M \leq 1000$ | 2 1 2 | 14 |
| $0 \leq K \leq 10$ | 3 2 7 | 9 |
| $1 \leq Q \leq 10^4$ | 4 5 6 | 13 |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. | 1 3 8 | 2 |
| Όριο μνήμης: 64 MB. | 1 4 4 | 12 |
| | 5 2 8 | IMPOSSIBLE |
| | 5 6 10 | 17 |
| | 1 5 5 | 24 |
| | 4 2 5 | 16 |
| | 1 6 1 | |
| | 3 5 0 | |
| | 1 2 0 | |
| | 3 5 1 | |
| | 1 2 1 | |
| | 4 3 1 | |
| | 6 4 0 | |
| | 2 6 2 | |
| | 6 4 1 | |
| | 6 4 2 | |

Άσκηση 2: Κύπελλο Ποδοσφαίρου

Στην εξωτική Παραγκούπολη, οι αγώνες του κυπέλλου ποδοσφαίρου λαμβάνουν χώρα ακολουθιακά, ο ένας μετά τον άλλο (και όχι σε γύρους, όπως συνήθως). Αρχικά, έχουμε N ομάδες που συμμετέχουν στην διοργάνωση, και μετά από κάθε αγώνα, η ηττημένη ομάδα βγαίνει εκτός διοργάνωσης, ενώ η νικήτρια παραμένει (δεν υπάρχουν ισοπαλίες). Η διοργάνωση ολοκληρώνεται όταν έχει μείνει μόνο μία ομάδα, η οποία κερδίζει το κύπελλο. Έχετε αναλάβει να καθορίσετε την ακολουθία των αγώνων επιλέγοντας ημερομηνίες και αντιπάλους.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνο από τις επιδόσεις και την προετοιμασία των ομάδων, αλλά και από την “τύχη”, δηλαδή το πρόγραμμα των αγώνων. Κι εσείς το γνωρίζετε πολύ καλά αυτό. Έχετε περάσει αρκετό καιρό βλέποντας προσεκτικά τις επιδόσεις κάθε ομάδας. Είναι πλέον προφανές ότι τα αποτελέσματα κάποιων αγώνων είναι 100% προβλέψιμα. Έχοντας αυτές τις πληροφορίες, θέλετε να δείτε αν μπορείτε να οργανώσετε το πρόγραμμα των αγώνων με τρόπο ώστε μια ομάδα X να κερδίσει το κύπελλο. Θέλετε δηλαδή να οργανώσετε τους αγώνες έτσι ώστε η ομάδα X να παίξει μόνο με αντιπάλους που σίγουρα θα κερδίσει (ώστε τελικά να κερδίσει το κύπελλο). Αν αυτό είναι δυνατό, λέμε ότι το κύπελλο μπορεί να “στηθεί” για λογαριασμό της ομάδας X . Θέλετε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει για ποιες ομάδες μπορεί να “στηθεί” το κύπελλο.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input ένα κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά τα ζεύγη των ομάδων για τις οποίες το μεταξύ τους αποτέλεσμα είναι 100% προβλέψιμο. Στην πρώτη γραμμή, θα δίνεται το πλήθος N των ομάδων, και θα ακολουθούν N γραμμές. Στην i -οστή γραμμή, ο πρώτος αριθμός d_i θα δηλώνει από πόσες ομάδες χάνει σίγουρα η ομάδα i (μπορεί να είναι 0), και θα ακολουθούν d_i αριθμοί, που θα δηλώνουν ποιες είναι αυτές οι ομάδες.

Π.χ. στο παράδειγμα, έχουμε 5 ομάδες, η 1η χάνει από μία ομάδα, την 5, η 2η χάνει από τρεις ομάδες, τις 1, 4, και 5, η 3η χάνει από δύο ομάδες, τις 1 και 4, η 4η χάνει από μία ομάδα, την 1, και η 5η χάνει από μία ομάδα, την 3.

Παρατηρήσεις: Τα δεδομένα για τη σχέση των αποτελεσμάτων που είναι προβλέψιμα θα περιγράφουν μια σχέση που είναι αντισυμμετρική και δεν είναι κατ' ανάγκη ούτε πλήρης ούτε μεταβατική. Δηλαδή, όσον αφορά στην αντισυμμετρικότητα, αν υπάρχει μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b , η b δεν θα χάνει από την a . Όσον αφορά στην πληρότητα, μπορεί να υπάρχουν ζευγάρια για τα οποία δεν γνωρίζουμε με σιγουριά ποια ομάδα χάνει από την άλλη. Όσον αφορά στην μεταβατικότητα, μπορεί να γνωρίζουμε ότι μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b , και ότι η b χάνει από μια ομάδα c , και να μην γνωρίζουμε με σιγουριά αν η a χάνει από την c (ή μπορεί ακόμη και να γνωρίζουμε ότι η c χάνει από την a).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο πλήθος των ομάδων για τις οποίες μπορεί να “στηθεί” η διοργάνωση του κυπέλλου.

Περιορισμοί:

$$3 \leq N \leq 30000$$

$$3 \leq M \leq 10^6$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

5

1 5

3 1 4 5

2 1 4

1 1

1 3

Παράδειγμα Εξόδου:

4