Δυναμικός Προγραμματισμός

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου

- Δίνονται *n* αντικείμενα και **σακίδιο** μεγέθους B. Αντικείμενο *i* έχει **μέγεθος** και **αξία**: (s_i, p_i)
- Ζητείται συλλογή μέγιστης αξίας που χωράει στο σακίδιο.

$$\begin{aligned} \max \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i p_i \\ \text{υπό περιορισμούς} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i s_i \leq B \\ & f_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \end{aligned} \qquad f_i = \begin{cases} 1 & i \text{ εντός} \\ 0 & i \text{ εκτός} \end{cases}$$

  - Αντικείμενα: { (1, 0.5), (2, 5), (2, 5), (3, 9), (4, 8) } Μέγεθος σακιδίου: **4**.
  - Βέλτιστη λύση = { (2, 5), (2, 5) }
  - Αντικείμενα: { (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) } Μέγεθος σακιδίου: **10**.
  - Βέλτιστη λύση = { (3, 5), (2, 7), (4, 4) }

Αρχή Βελτιστότητας

- Αντικείμενα $N = \{1, \ldots, n\}$, σακίδιο μεγέθους B. Βέλτιστη λύση $A^* \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
- Αγνοούμε αντικείμενο n :
  - $A^* \setminus \{n\}$ βέλτιστη λύση για $N \setminus \{n\}$ με σακίδιο $B - (f_n s_n)$.
- Αγνοούμε αντικείμενα $\{n, n - 1\}$:
  - $A^* \setminus \{n, n - 1\}$ βέλτιστη λύση για $N \setminus \{n, n - 1\}$ με σακίδιο $B - (f_n s_n + f_{n-1} s_{n-1})$.
- Αν γνωρίζουμε βέλτιστη αξία για αντικείμενα $N \setminus \{n\}$ και σακίδια μεγέθους B και $B - s_n$
  - … αποφασίζουμε αν αντικείμενο n στη βέλτιστη λύση!

Αναδρομική Εξίσωση

- $P(n\text{-}1, B)$ βέλτιστη αξία για N \ {n} σε σακίδιο B
  $P(n\text{-}1, B - s_n)$ βέλτιστη αξία για N \ {n} σε σακίδιο $B - s_n$

$$P(n,B) = \max\{P(n-1,B), P(n-1,B-s_n)+p_n\}$$

- Βέλτιστη αξία με αντικείμενα {1, …, *i* } και σακίδιο μεγέθους *b* : $P(i,b)$

$$P(i,b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \le 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i-1,b) & \text{αν } i \ge 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i-1,b), P(i-1,b-s_i)+p_i\} & \text{για } i = 1,\ldots,n \\ & \text{και } b = s_i,\ldots,B \end{cases}$$

  - (Αμιγώς) αναδρομική επίλυση της **δεν** είναι αποδοτική!!!

Παράδειγμα: Διωνυμικοί Συντελεστές

- Διωνυμικοί συντελεστές $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C(n,k) = \begin{cases} C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

```
long Binom(int n, int k) {
  if ((k == 0) || (k == n)) return(1);
  return(Binom(n – 1, k - 1) + Binom(n – 1, k)); }
```

  - Χρόνος εκτέλεσης δίνεται από την ίδια αναδρομή! $T(n,k) = \Theta(C(n,k)) = \Omega((n/k)^k)$, $C(30,15) = 155117520$
  - Πρόβλημα οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί.
- Όταν έχω επικαλυπτόμενα στιγμιότυπα, χρησιμοποιώ **δυναμικό προγραμματισμό**.

Τρίγωνο του Pascal

$$C(n,k) = \begin{cases} C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Όταν έχω επαναλαμβανόμενα στιγμιότυπα, αποθηκεύω τιμές σε πίνακα και τις χρησιμοποιώ χωρίς να τις υπολογίζω πάλι.
  - Θεαματική βελτίωση χρόνου εκτέλεσης!
  - Σημαντικές απαιτήσεις σε μνήμη.

n										
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Τρίγωνο του Pascal

$$C(n,k) = \begin{cases} C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Binomial(n, k)

$\quad C[0,0] = C[1,0] = C[1,1] = 1;$

$\quad$ **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

$\quad\quad C[i,0] \leftarrow 1;$

$\quad\quad$ **for** $j \leftarrow 1$ **to** $\min\{i-1, k\}$ **do**

$\quad\quad\quad C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + C[i-1,j];$

$\quad\quad$ **if** $i - 1 < k$ **then** $C[i,i] = 1;$

$\quad$ **return**$(C[n,k]);$

- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(nk)$ αντί για $\Omega((n/k)^k)$.
  - Μνήμη $\Theta(nk)$. Μπορεί να μειωθεί σε $\Theta(k)$.

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου: Δυναμικός Προγραμματισμός

$$P(i,b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \le 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i-1,b) & \text{αν } i \ge 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i-1,b), P(i-1,b-s_i)+p_i\} & \text{για } i = 1,\ldots,n \\ & \text{και } b = s_i,\ldots,B \end{cases}$$

- Αντικείμενα: { (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) }
  Μέγεθος σακιδίου: **10**.

$i \mid b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	5	**5**	5	5	5	5	5	5
2	0	0	7	7	7	12	**12**	12	12	12	12
3	0	0	7	7	7	12	12	12	12	16	**16**
4	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16
5	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16

Υλοποίηση

Αναδρομική υλοποίηση;

$\textbf{Knapsack}(B, (s_1, p_1), \ldots, (s_n, p_n))$

$\quad \textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } n \textbf{ do } P[i, 0] \leftarrow 0;$

$\quad \textbf{for } b \leftarrow 1 \textbf{ to } B \textbf{ do } P[0, b] \leftarrow 0;$

$\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

$\qquad \textbf{for } b \leftarrow 1 \textbf{ to } B \textbf{ do}$

$\qquad\quad \textbf{if } b - s_i \geq 0 \textbf{ then}$

$\qquad\qquad t \leftarrow P[i-1, b - s_i] + p_i;$

$\qquad\quad \textbf{else } t \leftarrow 0;$

$\qquad\quad \textbf{if } P[i-1, b] \geq t \textbf{ then}$

$\qquad\qquad P[i, b] \leftarrow P[i-1, b];$

$\qquad\quad \textbf{else } P[i, b] \leftarrow t;$

$\quad \textbf{return}(P[n, B]);$

Χρόνος **O(nB)**

Μνήμη **O(nB)**

Δυναμικός Προγραμματισμός

- Εφαρμόζουμε δυναμικό προγραμματισμό για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης όπου ισχύει:
  - **Αρχή βελτιστότητας** (βέλτιστες επιμέρους λύσεις).
    - Κάθε τμήμα βέλτιστης λύσης αποτελεί βέλτιστη λύση για αντίστοιχο υποπρόβλημα.
    - π.χ. κάθε τμήμα μιας συντομότερης διαδρομής είναι συντομότερη διαδρομή μεταξύ των άκρων του.
- Έστω βέλτιστες λύσεις για «μικρότερα» προβλήματα. Πως συνδυάζονται για βέλτιστη λύση σε «μεγαλύτερα»;
  - **Αναδρομική εξίσωση** που περιγράφει **τιμή** βέλτιστης λύσης.
  - Υπολογίζουμε λύση από μικρότερα σε μεγαλύτερα **(bottom-up).**

(Διακριτό) Πρόβλημα Σακιδίου

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Συλλογή που χωράει **εφικτή λύση**. Αντιστοιχεί σε **αξία**.
  - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) συλλογή που χωράει με μέγιστη αξία.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
  - #συλλογών = 2^n . Χρόνος $\Omega(n2^n)$
- Πρόβλημα Σακιδίου είναι **NP**-δύσκολο και δεν υπάρχει «γρήγορος» (πολυωνυμικός) αλγόριθμος.
  - Εφαρμογή δυναμικού προγραμματισμού.
  - Χρόνος $\Theta(n\,B)$. **Δεν** είναι πολυωνυμικός(;)!

Ψευδοπολυωνυμικοί Αλγόριθμοι

- Το πρόβλημα του σακιδίου είναι **NP**-δύσκολο.
- Αλγόριθμος $O(n\,B)$ δεν είναι πολυωνυμικού χρόνου;
  - Για ναι, πρέπει πολυώνυμο του μεγέθους εισόδου!
  - Μέγεθος εισόδου: $O(n(\log_2 B + \log_2 P_{\max}))$
  - Χρόνος πολυωνυμικός στο n αλλά εκθετικός στο $\log_2 B$
- Αριθμητικά προβλήματα:
  - Μέγεθος αριθμών πολύ μεγαλύτερο (π.χ. εκθετικό) από πλήθος «βασικών συνιστωσών» (ότι συμβολίζουμε με n).
- Αλγόριθμος πολυωνυμικό χρόνου:

$$O((n\ \log \mathrm{max\_num})^k),\ \text{σταθερά}\ k \geq 1$$

- Αλγόριθμος **ψευδο-πολυωνυμικού** χρόνου:

$$O((n\,\mathrm{max\_num})^k),\ \text{σταθερά}\ k \geq 1$$

Απληστία vs Δυναμικός Προγρ.

- Διακριτό Πρόβλ. Σακιδίου: **όχι** ιδιότητα άπληστης επιλογής.
  - Π.χ. Αντικείμενα: {(1, 1+ε), (B, B)}. Σακίδιο μεγέθους B.
- **Απληστία** και **Δυναμικός Προγραμματισμός**:
  - Αρχή βελτιστότητας.
- **Δυναμικός Προγραμματισμός**: αναδρομή
  - Βέλτιστη λύση σε **όλα** τα υπο-προβλήματα που εμπλέκονται στην αναδρομή.
    - Διακριτό Σακίδιο: Βέλτιστη λύση με πρώτα *i* αντικείμενα για **όλα** τα μεγέθη σακιδίου!
  - Συνδυάζει «κατάλληλες» επιμέρους λύσεις για βέλτιστη.
  - Λύση **όλων** υπο-προβλημάτων εγγυάται βέλτιστη λύση αλλά κοστίζει σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο.

Απληστία vs Δυναμικός Προγρ.

- **Απληστία:** επανάληψη
  - Ταξινόμηση ως προς κάποιο (εύλογο) κριτήριο.
  - Σε κάθε βήμα **αμετάκλητη** άπληστη επιλογή.
  - Άπληστη επιλογή: φαίνεται καλύτερη με βάση τρέχουσα κατάσταση και κάποιο (απλό) κριτήριο.
  - Λύση μόνο «**αναγκαίων**» υπο-προβλημάτων: αποδοτικό υπολογιστικά αλλά δεν δίνει πάντα τη βέλτιστη λύση.
    - Γρήγοροι, απλοί και «φυσιολογικοί» αλγόριθμοι!
    - (Καλές) προσεγγιστικές λύσεις σε πολλά προβλήματα.
    - Βέλτιστη λύση μόνο όταν άπληστη επιλογή (ως προς συγκεκριμένο κριτήριο επιλογής).

Subset Sum και Διαμέριση

- Subset Sum:
  - Σύνολο φυσικών $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$ και B, 0 < B < s(A).
  - Υπάρχει $X \subseteq A$ με $s(X) = \sum_{i \in X} s_i = B$;
  - Knapsack αποτελεί γενίκευση Subset Sum.
  - Πρόβλημα Διαμέρισης (Partition): όταν B = s(A) / 2
- S(i, b) είναι TRUE ανν υπάρχει $X \subseteq \{1, \ldots, i\}$ με s(X) = b.

$$S(i,b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } b = 0 \\ 0 & \text{αν } b < 0 \\ 0 & \text{αν } i = 0 \text{ και } b > 0 \\ S(i-1,b) \vee S(i-1,b-s_i) & \text{για } i = 1,\ldots,n \\ & \text{και } b = 1,\ldots,B \end{cases}$$

  - Η τιμή του S(n, B) δίνει την απάντηση.

Το Πρόβλημα του Περιπτερά

- Κέρματα αξίας 1, 12, και 20 λεπτών.
- Ρέστα ποσό *x* με **ελάχιστο** #κερμάτων.
  - Δυναμικός προγραμματισμός.

Αλυσιδωτός Πολ/μός Πινάκων

- Γινόμενο πινάκων A $(p \times q)$ επί B $(q \times r)$ σε χρόνο $\Theta(p\, q\, r)$.
  (μετράμε μόνο πολ/μούς μεταξύ αριθμών).
- Συντομότερος τρόπος υπολογισμού γινομένου

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ (d_0 \times d_1) & (d_1 \times d_2) & (d_2 \times d_3) & \ldots & (d_{n-2} \times d_{n-1}) & (d_{n-1} \times d_n) \end{array}$$

  - Πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη προσεταιριστική (αποτέλεσμα ανεξάρτητο από υπολογισμό επιμέρους γινομέν.)
  - Ο χρόνος υπολογισμού εξαρτάται από τη σειρά!

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ (1 \times 100) & (100 \times 3) & (3 \times 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (A_1 A_2) & & A_3 \\ (1 \times 100 \times 3) & + & (1 \times 3 \times 1) = 303 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & (A_2 A_3) \\ (1 \times 100 \times 1) & + & (100 \times 3 \times 1) = 400 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ (13 \times 5) & (5 \times 89) & (89 \times 3) & (3 \times 34) \end{array}$$

Σειρά Υπολογισμού	**Αριθμός Πολλαπλασιασμών**
$(((A_1A_2)A_3)A_4)$	$13 \times 5 \times 89 + 13 \times 89 \times 3 + 13 \times 3 \times 34 = 10582$
$((A_1A_2)(A_3A_4))$	54201
$((A_1(A_2A_3))A_4)$	2856
$(A_1((A_2A_3)A_4))$	4055
$(A_1(A_2(A_3A_4)))$	26418

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

- Δίνονται *n* πίνακες:

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ (d_0 \times d_1) & (d_1 \times d_2) & (d_2 \times d_3) & \dots & (d_{n-2} \times d_{n-1}) & (d_{n-1} \times d_n) \end{array}$$

  Με ποια σειρά θα υπολογιστεί το γινόμενο $A_1 A_2 \dots A_n$ ώστε να ελαχιστοποιηθεί #αριθμ. πολ/μών.
- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Κάθε σειρά υπολογισμού υπολογίζει γινόμενο πινάκων με κάποιο #αριθμ. πολ/μών.
  - Ζητείται η σειρά με ελάχιστο #αριθμ. πολ/μών.
- Αποδοτικός αλγόριθμος για υπολογισμό καλύτερης σειράς για αλυσιδωτό πολ/μό n πινάκων.

Εξαντλητική Αναζήτηση

- … δοκιμάζει όλες τις σειρές υπολογισμού και βρίσκει καλύτερη.
  - Κάθε σειρά αντιστοιχεί σε δυαδικό δέντρο με n φύλλα.
  - Χρόνος ανάλογος #δυαδικών δέντρων με n φύλλα:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k)\,,\ P(1) = 1$$

  - Λύση (n-1)-οστός αριθμός Catalan: $P(n) = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \Omega(\frac{4^n}{n^{3/2}})$
- Θα εφαρμόσουμε δυναμικό προγραμματισμό.

Αρχή Βελτιστότητας

- Συμβολίζουμε $A_{i..j} = A_i \times \cdots \times A_j$
- Βέλτιστη λύση υπολογίζει $A_{1..i}, (d_0 \times d_i),$ και $A_{i+1..n}, (d_i \times d_n),$ για κάποιο $i, 1 \leq i < n,$ και τελειώνει με $A_{1..i} \times A_{i+1..n}.$
  - #πολ/μών = $d_0 \times d_i \times d_n$ + #πολ/μών($A_{1..i}$) + #πολ/μων($A_{i+1..n}$)
  - Επιμέρους γινόμενα $A_{1..i}$ και $A_{i+1..n}$ υπολογίζονται **βέλτιστα**.
- Συμβολίζουμε $m[i, j] = \text{βέλτιστος \#πολ/μών}(A_{i..j})$
- Έστω για κάθε $i, 1 \leq i < n,$ γνωρίζουμε $m[1, i]$ και $m[i + 1, n]$
- Τότε $m[1, n] = \min_{1 \leq i < n}\{m[1, i] + m[i + 1, n] + d_0 d_i d_n\}$
- Γενική **αναδρομική σχέση**:

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j}\{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1}\, d_k\, d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός

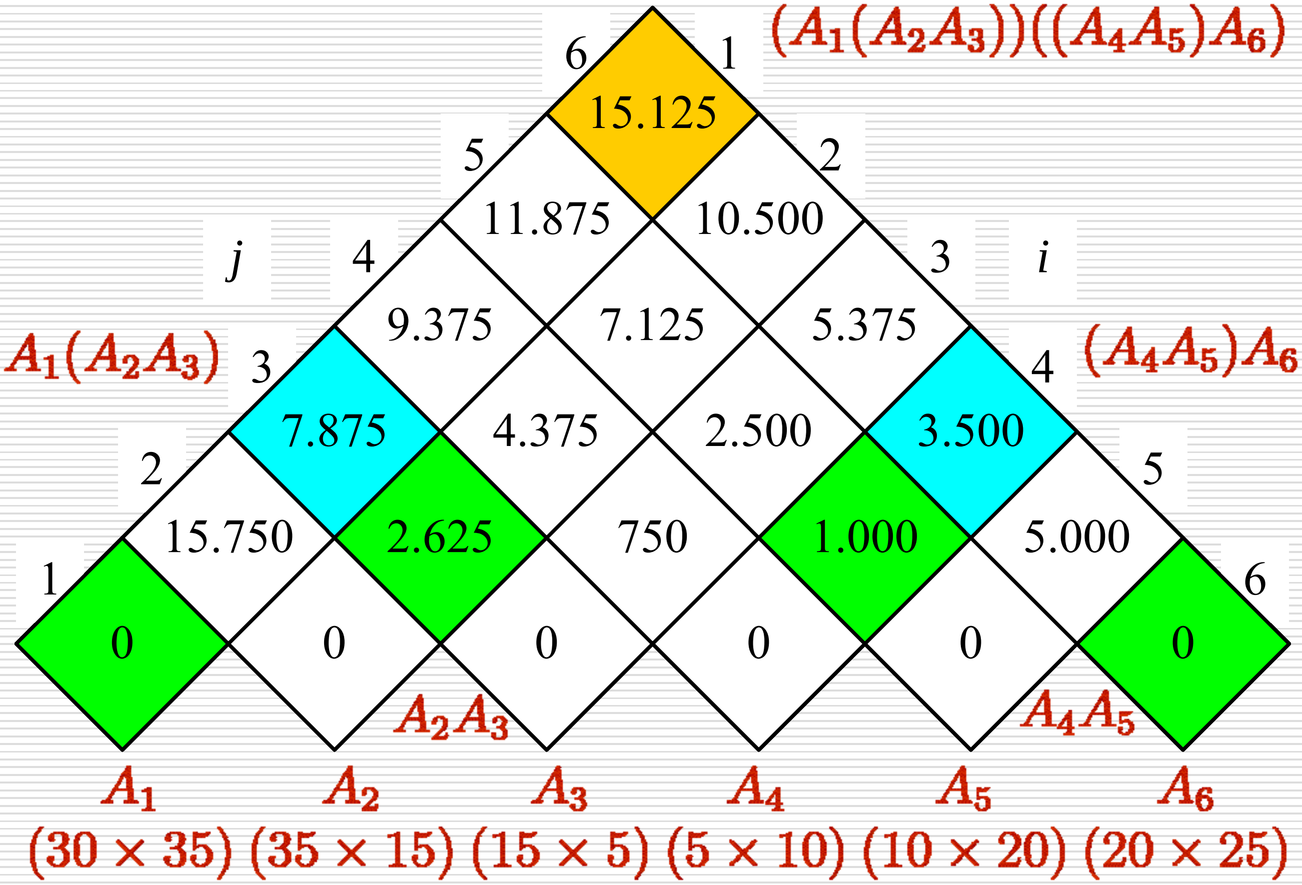
- Bottom-up υπολογισμός $m[1, n]$ από αναδρομική σχέση:

$$m[i,j] = \begin{cases} \min_{i \le k < j}\{m[i,k] + m[k+1,j] + d_{i-1}\, d_k\, d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

- Υπολογίζω $n(n - 1) / 2$ τιμές $m[i, j]$.
  - $m[i, j]$ υπολογίζεται σε χρόνο $O(n)$ από τιμές για γινόμενα μικρότερου εύρους.
  - Τιμές αποθηκεύονται σε πίνακα.

$$m[i,j] = \begin{cases} \min_{i \le k < j}\{m[i,k] + m[k+1,j] + d_{i-1}\, d_k\, d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Παράδειγμα



$$m[i,j] = \begin{cases} \min_{i \le k < j}\{m[i,k] + m[k+1,j] + d_{i-1}\, d_k\, d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Υλοποίηση (bottom-up)

MatrixChainMultiplication($d[0,1,\ldots,n]$) /* A_i διάστασης $d[i-1] \times d[i]$ */

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $m[i,i] \leftarrow 0;$
for $p \leftarrow 2$ **to** n **do**
  for $i \leftarrow 1$ **to** $n-p+1$ **do**
    $j \leftarrow i+p-1;\ m[i,j] \leftarrow \infty;$
    for $k \leftarrow i$ **to** $j-1$ **do**
      $q \leftarrow m[i,k] + m[k+1,j] + d[i-1]d[k]d[j];$
      if $q < m[i,j]$ **then** $m[i,j] \leftarrow q;$
return($m[1,n]$);

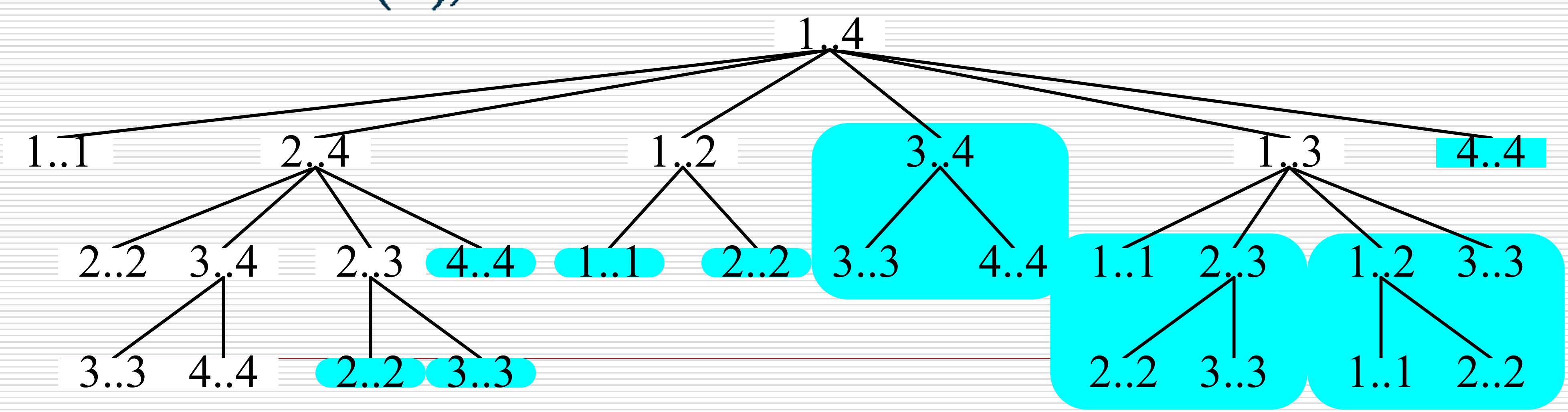
- Χρόνος $O(n^3)$ και μνήμη $O(n^2)$, μειώνεται σε $O(n)$.

$$m[i,j] = \begin{cases} \min_{i \le k < j}\{m[i,k] + m[k+1,j] + d_{i-1}\, d_k\, d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Υλοποίηση (top-down)

RecMatrixChain$(d[i-1,\ldots,j])$
    if $i = j$ **then return**(0);
    $m \leftarrow \infty$;   /* Το m θα πάρει την τιμή $m[i,j]$ */
    for $k \leftarrow i$ **to** $j-1$ **do**
        $q \leftarrow$ RecMatrixChain$(d[i-1,\ldots,k])$ +
            RecMatrixChain$(d[k,\ldots,j]) + d[i-1]d[k]d[j]$;
        if $q < m$ **then** $m \leftarrow q$;
    return(m);

Εκθετικός χρόνος!



Αναδρομή με Απομνημόνευση

- Ο αναδρομικός αλγόριθμος αποθηκεύει τιμές σε πίνακα. Κάθε τιμή υπολογίζεται μία φορά.
  - Συνδυάζει απλότητα top-down προσέγγισης με ταχύτητα bottom-up.

$\textbf{RecMemMatrixChain}(d[0,\ldots,n])$

    $\textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

        $\textbf{for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

            $m[i,j] \leftarrow \infty;$

    $\textbf{return}(\text{RecCM}(d[0,\ldots,n]));$

$\text{RecCM}(d[i-1,\ldots,j]);$

    $\textbf{if } m[i,j] < \infty \textbf{ then return}(m[i,j]);$

    $\textbf{if } i = j \textbf{ then } m[i,j] = 0;$

    $\textbf{else}$

        $\textbf{for } k \leftarrow i \textbf{ to } j-1 \textbf{ do}$

            $q \leftarrow \text{RecCM}(d[i-1,\ldots,k]) + \text{RecCM}(d[k,\ldots,j]) + d[i-1]d[k]d[j];$

            $\textbf{if } q < m[i,j] \textbf{ then } m[i,j] \leftarrow q;$

    $\textbf{return}(m[i,j]);$

ΔΠ vs ΔκΒ

- Δυναμικός Προγραμματισμός και Διαίρει-και-Βασίλευε επιλύουν προβλήματα συνδυάζοντας λύσεις κατάλληλα επιλεγμένων υπο-προβλημάτων.
- ΔκΒ είναι φύσει αναδρομική μέθοδος (top-down).
- ΔκΒ επιλύει υπο-προβλήματα ανεξάρτητα.
  - Εφαρμόζεται όταν παράγονται ανεξάρτητα υπο-προβ/τα.
  - Ειδάλλως ίδια υπο-προβλήματα λύνονται πολλές φορές: Σπατάλη υπολογιστικού χρόνου.

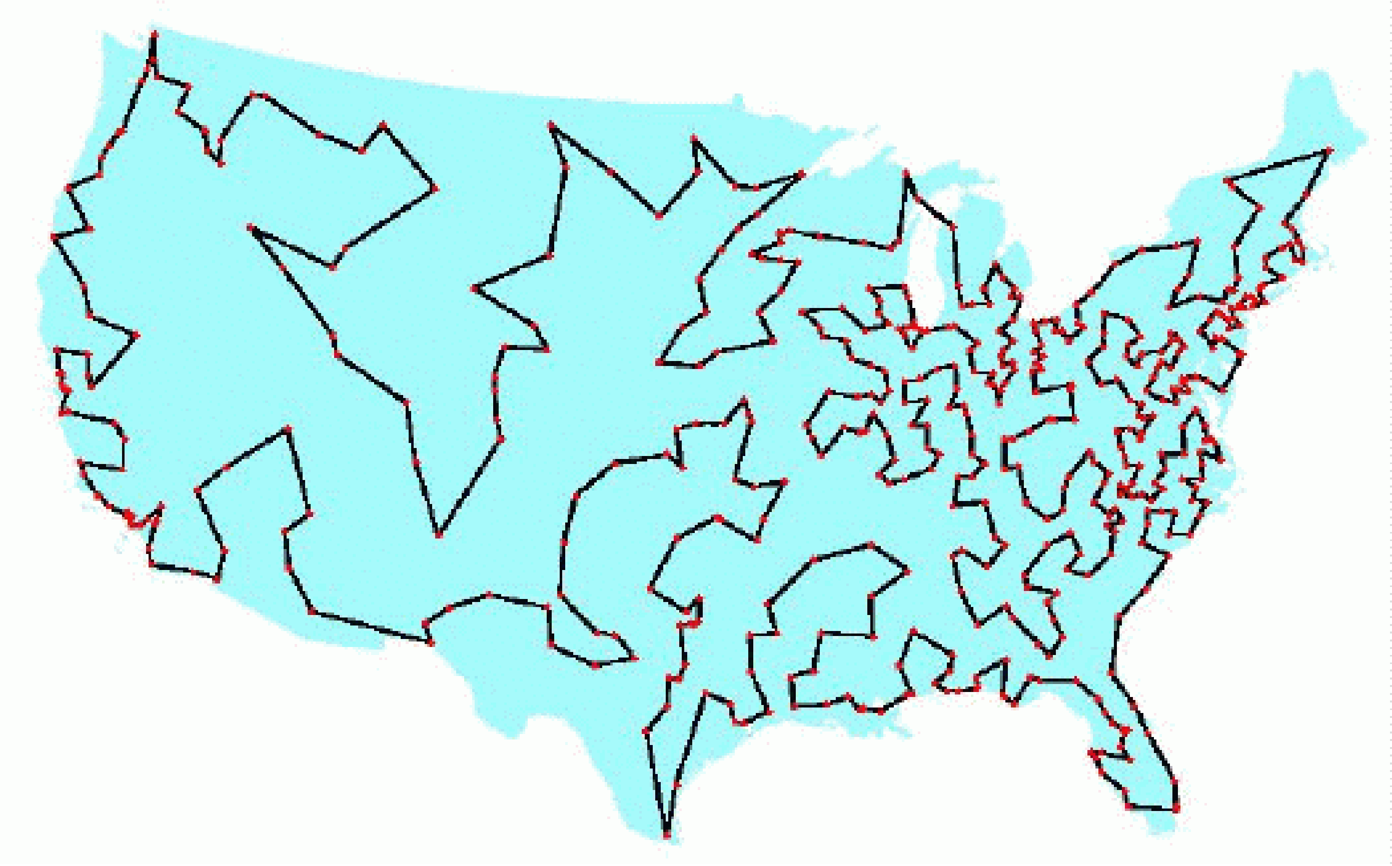
ΔΠ vs ΔκΒ

- ΔΠ «κτίζει» βέλτιστη λύση προβ/τος από βέλτιστες λύσεις υπο-προβ/των (bottom-up).
  - ΔΠ ξεκινά με στοιχειώδη στιγμιότυπα.
  - Συνδυάζει λύσεις για να βρει λύσεις σε μεγαλύτερα.
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν υπο-προβ/τα επικαλύπτονται. Αποθηκεύει επιμέρους λύσεις για να μην υπολογίζει πάλι.
  - «Προγραμματισμός» διαδικασία συμπλήρωσης πίνακα με ενδιάμεσα αποτελέσματα (Bellman, 50's).
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν ισχύει αρχή βελτιστότητας.
  - Διατύπωση αναδρομικής εξίσωσης για βέλτιστη λύση.
  - Αναδρομική εξίσωση λύνεται bottom-up για βέλτιστη **τιμή**.
  - Επιλογές κατά την επίλυση απαρτίζουν βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

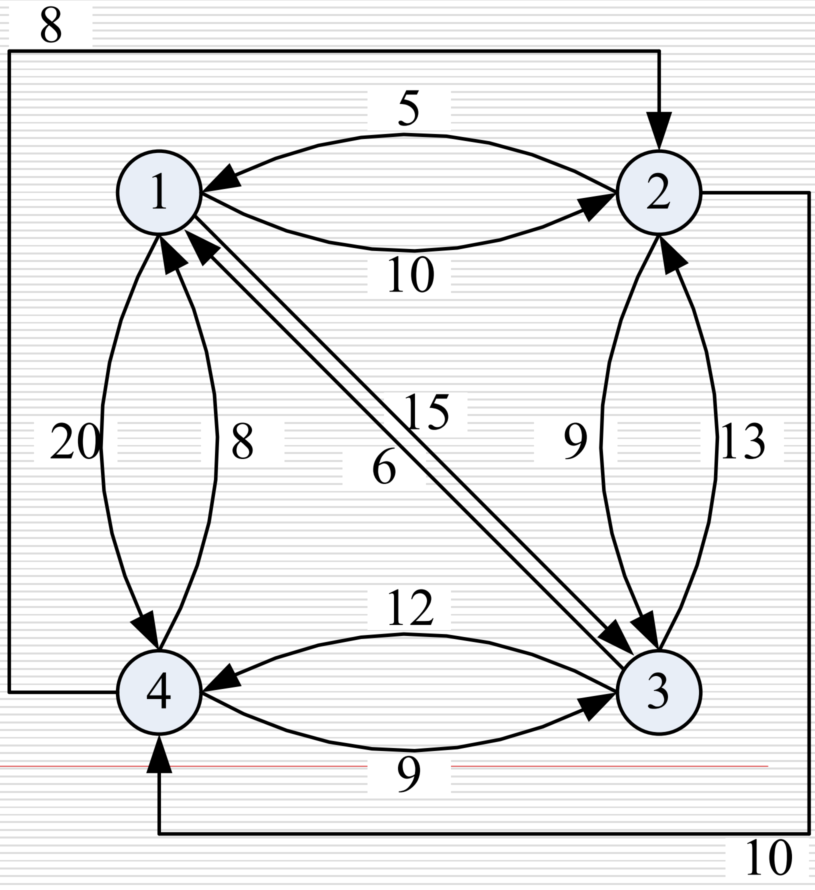
- Δίνονται *n* σημεία $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ και αποστάσεις τους $d : N \times N \mapsto \mathbb{R}_+$
  - Απόσταση i → j = d_{ij}, απόσταση j → i = d_{ji}
  - Γενική περίπτωση: όχι συμμετρικές αποστάσεις,
    όχι τριγωνική ανισότητα.
- Ζητείται μια **περιοδεία ελάχιστου** συνολικού **μήκους**.
  - Περιοδεία: κύκλος που διέρχεται από κάθε σημείο μία φορά.
  - Περιοδεία: μετάθεση σημείων $\pi : N \mapsto N$, $\pi(1) = 1$
    Μετάθεση (permutation): 1-1 και επί αντιστοιχία N με N.
    - Π.χ. $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$
      $1\ 5\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 6$
  - Μήκος περιοδείας π: $L(\pi) = d_{\pi(n)1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i)p(i+1)}$

Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή



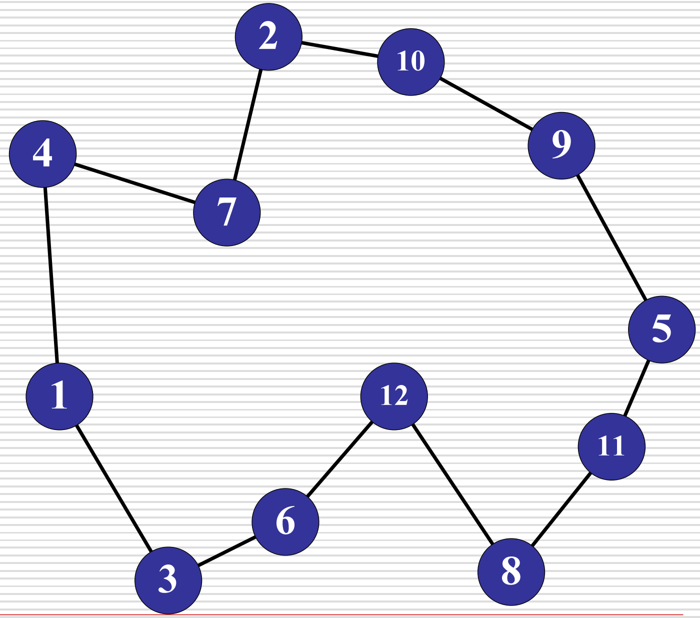
Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Κάθε περιοδεία **εφικτή λύση** και αντιστοιχεί σε **μήκος**.
  - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) περιοδεία ελάχιστου μήκους.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
  - #περιοδειών = (n – 1)!
  - Χρόνος Ω(n!)
- ΠΠΠ είναι **NP**-δύσκολο και δεν υπάρχει «γρήγορος» (πολυωνυμικός) αλγόριθμος.
  - Δυναμικός προγραμματισμός λύνει γενική περίπτωση σε χρόνο $\Theta(n^2 2^n)$.



Αρχή Βελτιστότητας

- Βέλτιστη περιοδεία ξεκινάει $1 \to i$ και συνεχίζει …
  - … από $i \to$ όλα τα σημεία $N \setminus \{ 1, i \} \to 1$.
  - Αυτό το τμήμα βέλτιστο με αυτή την ιδιότητα.
    - Διαφορετικά, βελτιώνω τμήμα και περιοδεία συνολικά!
- Έστω $L(i, S)$ ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από $i \to$ όλο το $S \to 1$, ($i \notin S$).
  - Αν $S \subset N \setminus \{1\}$, τότε $i \neq 1$ (το 1 προστίθεται τελευταίο).
  - Εύκολα $L(i, \emptyset) = d_{i1}, \forall i \neq 1$
  - $L(i, \{j\}) = d_{ij} + d_{j1}$



Αρχή Βελτιστότητας

- Έστω $L(i, S)$ ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από $i \to$ όλο το $S \to 1$, ($i \notin S$).
  - Αν $S \subset N \setminus \{1\}$, τότε $i \neq 1$ (το 1 προστίθεται τελευταίο).
  - Εύκολα για $|S| = 0, 1, 2$:

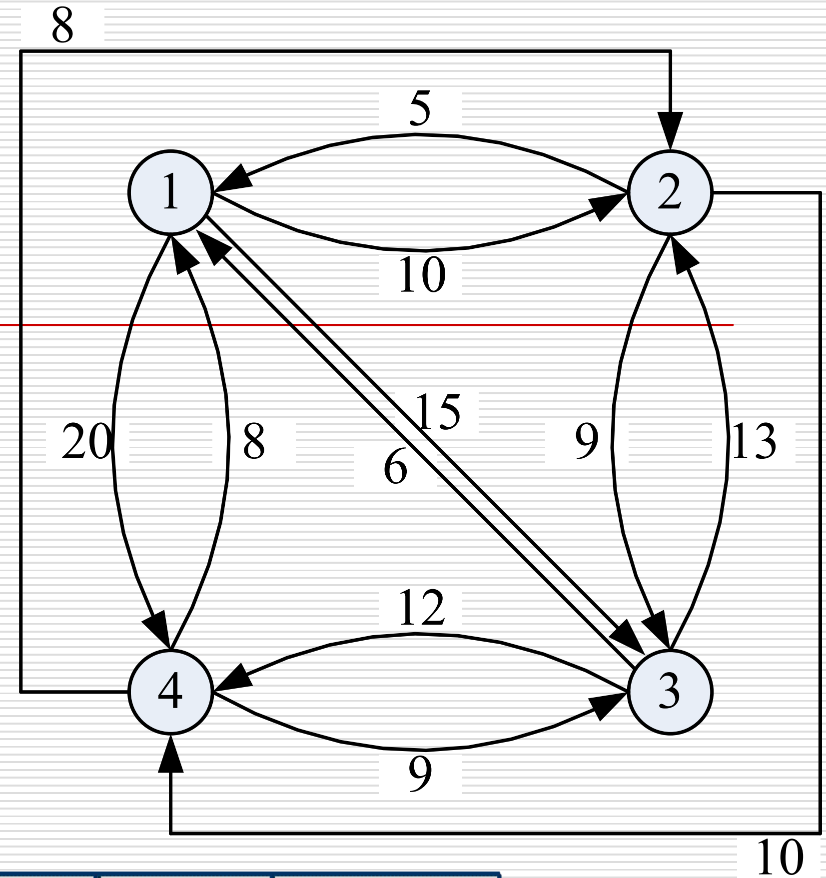
$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + d_{j\ell} + d_{\ell 1}, d_{i\ell} + d_{\ell j} + d_{j1}\}$$
$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + L(j, \{\ell\}), d_{i\ell} + L(\ell, \{j\})\}$$

  - Υπολογίζω $L(i, S)$, $|S| = k$, αν γνωρίζω όλα τα $L(j, S \setminus \{j\})$:

$$L(i, S) = \min_{j \in S}\{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

  - Υπολογίζω όλες τις βέλτιστες «υπο-περιοδείες» που τελειώνουν στο 1 και έχουν μήκος 1, 2, 3, 4, …, για κάθε υποσύνολο αντίστοιχου μεγέθους.

Παράδειγμα



$$L(i,S) = \min_{j \in S}\{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

$i \vert S$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3,4\}$
1								**35 (2)**
2	5		15 (3)	18 (4)	**25 (4)**			
3	**6**	18 (2)		20 (4)		25 (4)		
4	8	13 (2)	**15 (3)**				23 (2)	

- Βέλτιστη περιοδεία **1, 2, 4, 3** μήκους **35.**

Υλοποίηση

$$L(i,S) = \min_{j \in S}\{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})$$

$\mathbf{TSP}(d[1\ldots n][1\ldots n])$

$\quad$ **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do** $L(i,\emptyset) \leftarrow d[i,1]$;
$\quad$ **for** $k \leftarrow 1$ **to** $n-2$ **do**
$\quad\quad$ **for all** $S \subset N \setminus \{1\}, |S| = k$ **do**
$\quad\quad\quad$ **for all** $i \in (N \setminus \{1\}) \setminus S$ **do**
$\quad\quad\quad\quad$ $q \leftarrow \infty$;
$\quad\quad\quad\quad$ **for all** $j \in S$ **do**
$\quad\quad\quad\quad\quad$ **if** $d[i,j] + L(j, S \setminus \{j\}) < q$ **then**
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $q \leftarrow d[i,j] + L(j, S \setminus \{j\})$; $\quad t \leftarrow j$;
$\quad\quad\quad\quad\quad$ $L(i,S) \leftarrow q$; $\quad J(i,S) \leftarrow t$;
$\quad$ $q \leftarrow \infty$;
$\quad$ **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
$\quad\quad$ **if** $d[1,j] + L(j, N \setminus \{1,j\}) < q$ **then**
$\quad\quad\quad$ $q \leftarrow d[1,j] + L(j, N \setminus \{1,j\})$; $\quad t \leftarrow j$;
$\quad$ $L(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow q$; $\quad J(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow t$;
$\quad$ **return**$(L(1, N \setminus \{1\}), J)$;

Μνήμη **$\Theta(n\, 2^n)$**

Χρόνος **$\Theta(n^2\, 2^n)$**

20 σημεία:

$20! = 2.4 \times 10^{18}$

$20^2\, 2^{20} = 4.2 \times 10^8$